Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nella scuola di base

Maria Mellone (mellonem@unina.it) *& Maria Pezzia* (cinquenomi@yahoo.it)

"*pareva non potesse pensare se non con le mani*"
(U. Eco, *Il nome della rosa*)

Introduzione

Nell'ambito dell'educazione matematica l'origine della comprensione delle operazioni aritmetiche nei bambini è da sempre una delle questioni più discusse; con il tempo si è fatta strada l'idea che tale origine sia da ricercare negli schemi di azione. Questa ipotesi ha giustamente trovato largo consenso nelle moderne teorie di apprendimento (Correa, Bryant & Nunes, 1998), tuttavia è fondamentale operare in modo tale che detti schemi non entrino in conflitto con le fasi successive di costruzione delle operazioni, ostacolando in tal modo la possibilità di predisporre, fin dai suoi stadi iniziali, un programma di matematica organico. Vi è quindi la necessità di costruire nelle scuole elementari un approccio all'aritmetica che tenga in considerazione sia le sue radici negli schemi di azione, che i successivi passaggi di sviluppo.
In questa direzione il nostro lavoro di ricerca si sviluppa attraverso la coordinazione di un progetto sperimentale presso la scuola elementare Madonna Assunta, 73° circolo di Napoli e una prima. Nell'azione di ricerca, iniziata nel 2003/2004, stiamo seguendo una classe elementare dalla prima alla quinta, cercando in collaborazione con l'insegnante di creare "dinamiche di risonanza"[1]((*C*)) ed osservarne il funzionamento. Siamo al quarto anno ed i primi risultati, riportati in (Guidoni; Mellone & Pezzia, 2005), e il lavoro di ricerca attualmente in corso ci fanno pensare che nell'insieme "la cosa funzioni": le attività proposte, il modo in cui vengono sviluppate, le relazioni tra le persone coinvolte concorrono effettivamente a creare dinamiche di "comprensione risonante". Spiegheremo meglio in seguito su quali elementi ci basiamo per poter fare questa valutazione.
In questo momento stiamo tentando di dare una più precisa sistemazione teorica alle osservazioni e riflessioni emerse nel corso del progetto. Il nostro lavoro ha l'obiettivo di chiarire meglio quali sono i punti di forza della situazione sperimentale in cui siamo coinvolte, e quali i "punti critici" in cui è necessario che l'opera di mediazione culturale svolta dagli adulti si faccia particolarmente attenta e sensibile alle difficoltà che prevedibilmente incontreranno i bambini. Rispondere a queste due domande è essenziale per proseguire la sperimentazione nella direzione migliore e soprattutto per poter pensare di allargarla ad altri contesti. In particolare come formatori di insegnanti ci poniamo quotidianamente il problema di come l'esperienza maturata in progetti sperimentali come questo possa essere comunicata e utilizzata dai maestri o futuri maestri. Spesso il pericolo è che gli insegnanti rimangano con la convinzione di dover prendere un pacchetto di attività preconfezionato e "collaudato" dai ricercatori, e semplicemente applicarlo (Vaccaro, 2005). Procedendo in questo modo è ben difficile che i risultati siano positivi. Le condizioni che hanno reso possibile la comprensione in una situazione didattica non sempre sono i fattori più evidenti ad un primo sguardo, e si rischia quindi di riprodurre soltanto alcuni aspetti inessenziali, superficiali di una determinata attività, che potrebbero e dovrebbero invece essere modificati per adattarli ad un contesto differente. Nel far questo spesso si trascurano proprio i reali punti di forza del modello di intervento proposto, non si arriva a capire quello che realmente una certa esperienza può insegnare.

Riferimenti teorici

Grazie ai recenti sviluppi nelle scienze cognitive e nelle neuroscienze si è affermata l'ipotesi che gli esseri umani, come alcune specie animali, abbiano una predisposizione innata inerente alla

[1] "*risonanza*, in termini piagetiani, una convergenza locale fra assimilazione e accomodamento che produce una equilibrazione parziale."

numerosità (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997). Tale predisposizione combinata con l'abilità prettamente umana dell'uso di simboli, del linguaggio, è divenuta un punto centrale a cui riferirsi nel modello di sviluppo del pensiero matematico.
Sembra inoltre che *"L'attitudine a formare prerappresentazioni sarebbe di origine genetica, quasi una predisposizione innata a comprendere ed apprendere, il processo di selezione e di stabilizzazione avviene per tentativi ed errori*"((*B*)). L'apprendimento sarebbe allora il risultato di una selezione di prerappresentazioni e in questa direzione l'attività di modellizzazione potrebbe essere guardata come attività privilegiata perché in risonanza con il lavoro del cervello: "*Una continua azione di modellizzazione/simulazione, con continua valutazione di fit / no-fit delle diverse ipotesi in gioco, sottende quindi tutta la complessità della dinamica cognitiva: da quella percettivo-motoria a quella più esplicitamente formale. E quando si "indovina" (quando si riconosce, quando si riesce-a…, quando si capisce, quando si "mette in forma",… quando si "verifica"…) sempre si indovina perché si produce una risonanza (in termini piagetiani, una convergenza locale fra assimilazione e accomodamento che produce una equilibrazione parziale). Ed è la verifica (risonanza) ben prima della falsificazione (dissonanza) delle ipotesi a costiture la chiave dinamica dello sviluppo di ogni conoscenza, individuale e sociale*"((*C*)).
I risultati di neuroscienze illustrati danno forza ad osservazioni già riconosciute a livello psicologico e integrano modelli di educazione matematica già esistenti. In particolare intendiamo riferirci al modello proposto da Anna Sfard (1991), le cui riflessioni ci sembrano confluire verso l'attività di modellizzazione. Uno dei primi meriti di questo lavoro è quello di mettere in evidenza in modo molto chiaro quello che ci pare un problema essenziale per chi fa ricerca in didattica della matematica: spesso si spiega la difficoltà della maggior parte delle persone nell'aver a che fare con la matematica con l'affermazione che questa è "la più astratta tra le scienze". Ma questa affermazione, che è ormai un luogo comune, non ha un grande potere esplicativo. La domanda che ci si dovrebbe porre, secondo Sfard, è qualitativa più che quantitativa e, vale a dire, in che modo l'astrazione matematica differisce da altri tipi di astrazione. Qualsiasi proposta di un percorso di apprendimento della matematica dipende, o dovrebbe dipendere in larga misura dalla risposta che ci si da a questa domanda.
Il modello suggerito da Sfard emerge da un'analisi di dati storici, in particolare l'evoluzione dei concetti di numero e funzione, e di teorie psicologiche e dati sperimentali a proposito dell'apprendimento della matematica sia elementare che avanzata. I dati sembrano confermare l'ipotesi che, sia nella costruzione nel corso della storia dei concetti matematici, che nel loro apprendimento da parte degli studenti piccoli e grandi, ciascun concetto venga visto e sperimentato prima come *processo* e solo in seguito si condensi in un *oggetto astratto*. In altre parole ci sono buoni motivi per aspettarsi che: *nel processo di formazione dei concetti le concezioni operative precedano quelle strutturali*. Quest'ultima osservazione, come abbiamo detto, sembra essere vera sia nell'ambito dello sviluppo storico della matematica che nell'apprendimento individuale, tuttavia non va intesa come legge assoluta: infatti ci possono essere delle eccezioni come ad esempio accade per alcuni concetti geometrici nati da immagini piuttosto che da processi.
La particolarità del modello di Sfard, comunque, consiste nella stretta integrazione tra i due modi di guardare agli enti matematici, come *processi* e/o come *oggetti astratti*. La visione operazionale e quella strutturale vengono considerate complementari, entrambe necessarie, come appunto due facce della stessa medaglia. Nessuna delle due va privilegiata rispetto all'altra, mentre di solito i matematici tendono a considerare superiore la visione strutturale perché più "astratta" e difficile da raggiungere. Questo in un certo senso è vero proprio perché la visione operativa di un determinato concetto viene prima e sembra risultare più naturale. È vero però anche che non ho bisogno di condensare un processo in un oggetto astratto a meno che questo oggetto non mi serva come ingranaggio da usare in un processo di livello superiore. Questa considerazione può avere a nostro parere importanti implicazioni didattiche: **la reificazione di un processo in un oggetto astratto**[2] è

[2] Processo che avviene anche nell'attività di modellizzazione.

un’operazione cognitiva assai complessa che richiede, in genere, anche una lunga fase di transizione (se si guarda alla storia della matematica può trattarsi anche di secoli). Se vogliamo coinvolgere uno studente, grande o piccolo, in un’operazione di questa portata è necessario che la motivazione sia forte: dovremmo farlo trovare in una situazione in cui sente l’esigenza di passare ad un livello operativo più complesso, lasciare anzi che cominci ad esplorarlo per rendersi conto della comodità di compattare un processo che già conosce in un oggetto nuovo. Inoltre, sarebbe bene che sia l’esplorazione dei processi, sia il passaggio alla costruzione degli oggetti fosse percepita dagli studenti come un percorso a cui partecipano attivamente, che hanno dunque almeno in parte sotto controllo, anche se magari non si figurano ancora bene “come andrà a finire”. In questo quadro l’attività di modellizzazione appare ancora una volta come attività privilegiata in quanto effettivamente costruita attraverso esplorazioni di fenomeni, e quindi di processi, che per essere interpretati e utilizzati ad un altro livello, hanno bisogno di essere condensati in modelli.

Se è vero che il percorso di apprendimento dovrebbe essere almeno in parte controllato da chi apprende, c’è però, soprattutto in questo tipo di processo, qualcosa che sfugge necessariamente al controllo. Ci si trova, infatti, in quello che Sfard ha chiamato un “circolo vizioso” - questo è l’altro punto che abbiamo trovato estremamente utile nel suo studio -: da una parte se non stiamo provando a compiere operazioni ad un livello più alto non ci serve reificare un processo in un oggetto astratto; dall’altra, se non abbiamo degli oggetti su cui operare, le operazioni ci appaiono prive di significato. Mettere in evidenza questo circolo vizioso ci aiuta a capire che è necessaria una mediazione didattica particolarmente attenta a questo passaggio. Gli studenti hanno bisogno di una notevole dose di pazienza e di fiducia nel fatto che questo percorso abbia un senso e porti da qualche parte, oltre che, come si è detto, di una motivazione abbastanza forte per intraprenderlo e non abbandonarlo alle prime difficoltà, *“Il cervello è un sistema motivato,* ***geneticamente motivato ad apprendere****, ma la motivazione è modulata dal principio di rilevanza cognitiva: lo sforzo richiesto per un’effettiva comprensione… deve essere bilanciato dalla percezione della rilevanza cognitiva individuale. Tale rilevanza, d’altra parte, è valutata rispetto ad obiettivi di natura individuale, peraltro anch’essi condizionati dall’ambiente sociale e culturale…”* ((*B*)) .

In questo senso è molto importante, soprattutto per i bambini, ma non solo per loro, la fiducia nell’insegnante visto come persona sensata e convinta di quello che sta facendo, e che in genere ci propone cose interessanti e alla nostra portata anche se all'inizio apparentemente possono sembrare strane o difficili[3]. La nostra esperienza, inoltre, ci ha mostrato come i bambini, ma anche i grandi, soprattutto se non hanno alle spalle esperienze positive con la matematica, abbiano spesso bisogno di essere rassicurati e incoraggiati ad andare avanti a sperimentare, ad esplorare un campo tentando di dargli ordine, anche se non è tutto chiaro dall’inizio. Inoltre, è importante favorire l’invenzione e la sperimentazione da parte degli studenti di oggetti, e relativi simboli, transitori, anche diversi da quelli convenzionali, nel momento in cui si sta cercando di riorganizzare un insieme di conoscenze per poter operare ad un nuovo livello. È molto utile soprattutto in questa fase che venga lasciato un ampio margine di autonomia, possibilità di confronto e discussione.
Cercheremo di mostrare con il racconto di alcune attività realizzate a scuola come abbiamo tentato di creare queste condizioni.

Scelte Metodologiche

Per l’inquadramento metodologico del nostro studio ci riferiamo ai *design studies* ((*C_1*)). In questa direzione il nostro progetto è un lavoro di “ricerca azione partecipativa” (Orefice, 2006), caratterizzato da una collaborazione e un confronto paritario tra ricercatori ed insegnante sia nella definizione dei problemi concreti da indagare, sia nello svolgimento della ricerca e nella progettazione degli interventi. La ricerca è realizzata da tutti membri della comunità che vi partecipano: anche i bambini sono coinvolti come attori consapevoli del nuovo percorso e chiamati ad operare ricostruzioni ed esprimere valutazioni in merito a quanto avviene.

[3] Cfr. mediatore secondo L. S. Vygotskij

Inoltre la pretesa neutralità della ricerca e dei ricercatori è superata: i ricercatori, infatti, non si limitano a conoscere il fenomeno, ma divengono, inevitabilmente, agenti di cambiamento socio-educativo, partecipano alla ricerca a fianco agli altri e apprendono durante la ricerca coinvolgendosi nei processi analizzati.

Oltre queste premesse vanno precisate però alcune scelte più specifiche che hanno caratterizzato il progetto fin dall'inizio:

- In primo luogo abbiamo scelto di osservare un particolare contesto-classe lungo i cinque anni del percorso elementare. Questo perché riteniamo che un investimento di ricerca a lungo termine possa essere meglio finalizzato a verificare l'efficacia dell'approccio proposto, e aiuti ad individuare le sue caratteristiche e la sua flessibilità.
- Altra scelta è stata quella di agire e osservare una classe dove l'insegnante è anche un'esperta ricercatrice. In particolare l'esperienza dell'insegnante in questo campo facilita l'integrazione tra i nostri interventi e il suo lavoro giornaliero in classe che si svolge anche come sostegno e rinforzo delle diverse attività proposte.

Strumenti di analisi

Il nostro lavoro di ricerca si disegna come uno studio descrittivo in cui si vuole verificare l'efficacia della realizzazione del percorso proposto, organizzato attraverso una serie di attività, in parte già esplorate e parzialmente verificate in altri contesti, di cui come si è detto si intendono chiarire i punti di forza e i punti critici. La caratteristica peculiare è che il percorso proposto è pensato tenendo costantemente sotto controllo, alla luce del quadro teorico, due fattori fondamentali: il primo coinvolge una riflessione di tipo scientifico sulla disciplina, ripensata criticamente, valutando i diversi importanti passaggi di astrazione; il secondo invece riguarda una riflessione didattica su come questi passaggi possono essere effettuati, quali possono essere le eventuali difficoltà cognitive.

La verifica dell'efficacia del percorso risulta inevitabilmente intrecciata all'osservazione dei punti chiave dell'azione didattica e alla progettazione dell'azione successiva. Il nostro, quindi, non appare come un percorso precostituito, ma più esattamente come un approccio di fondo che si sviluppa e realizza attraverso una progettazione-riprogettazione continua in base all'azione-interazione realizzata.

Nella complessità del lavoro possiamo però distinguere tre momenti fondamentali di verifica e osservazione. Il primo è un momento contemporaneo all'attività stessa, questo proprio perché più che di azione si tratta di interazione. Da questo punto di vista la maggior parte della raccolta dati è avvenuta attraverso l'osservazione diretta della situazione classe, le registrazioni delle discussioni di classe e la raccolta di alcune rappresentazioni dei bambini. Ultimamente ci siamo rese conto che anche l'utilizzo della videoregistrazione può ritornarci utile, questo si è reso evidente soprattutto confrontandoci con studi recenti nei quali si affronta il problema di come spesso le trascrizioni e le rappresentazioni considerate isolatamente possono non essere sufficienti all'analisi (San Diego, Aczel, Hodgson & Scanlon, 2006)

Il secondo momento di controllo è locale, in esso si osserva la capacità dei bambini di gestire, in autonomia, variazioni sul tema dell'attività proposta. Questo momento è per lo più lasciato alla maestra e successivamente registrato attraverso gli incontri e le discussioni tra noi ricercatori e l'insegnante.

Infine il terzo momento di verifica, che non va mai intesa come verifica definitiva, riguarda la capacità dei bambini di saper usare strategie per risolvere situazioni più complesse. Tipica di questo momento può essere una situazione di problem-solving in cui bisogna capire quale struttura operativa può tornare utile, si tratta cioè di vedere quanto i bambini riescano a muoversi all'interno di una struttura in contesti diversi. Va inoltre aggiunto che i momenti di verifica sono concepiti come direttamente integrati nel percorso di ricerca-azione per cercare, il più possibile, di non interferire e scontrarsi con il corso del processo di costruzione dei concetti.

I dati, quindi, sono stati e sono raccolti durante tutto il processo proprio per monitorare l'intera azione e riflettere sugli aspetti critici.
L'analisi verrà documentata nei due paragrafi della struttura additiva e moltiplicativa, in modalità narrativa, caratteristica dei progetti di ricerca-azione, con la narrazione, cioè, dell'esperienza fatta attraverso il racconto di aneddoti significativi, di incidenti sul percorso, di illuminazioni ed epifanie che hanno riattivato situazioni bloccate, questo proprio per aiutare chi legge a vivere l'esperienza in maniera vicaria, sollecitandone la riflessione.

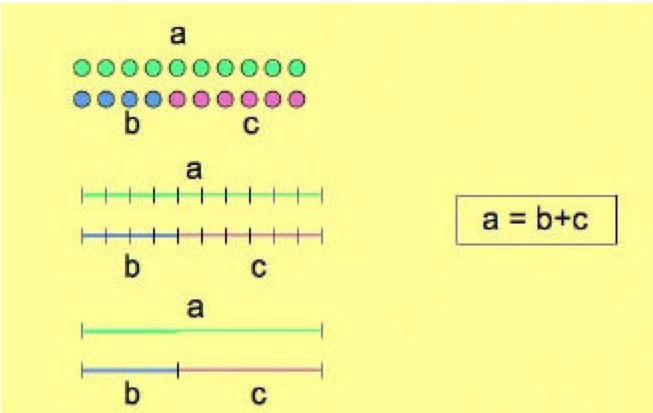
Le strutture

Per chiarire la visione della matematica che ha dato luogo alla scelta delle attività, si può partire da una citazione di Lebohec:
«Un primo anno di esperienza mi aveva finalmente aperto la mente. Avevo compreso che la matematica è dovunque, perché dovunque ci sono delle strutture sottostanti».
I bambini devono esplorare le strutture in modo tale che le attività non servano unicamente per fare esercizio, ma fungano anche da tramite per far emergere la struttura stessa.
La strategia da noi utilizzata è stata quella di partire dalle azioni, che gradualmente diventavano sempre più "azioni strutturate", coordinate in maniera consapevole, per poi giungere ad astrarre da esse le strutture formali. Il processo è avvenuto generalmente coinvolgendo dapprima il corpo inteso come movimento, percezione di sé nello spazio, manipolazione, azioni che lentamente arrivavano a coordinarsi e organizzarsi, ad esempio attraverso un'**organizzazione ritmica**. Mentre si agisce, e anche dopo, si comincia a rappresentare ciò che si fa, per registrarlo e per schematizzarlo.
Alla fine si comincia a "**vedere la struttura**". Il verbo vedere viene spontaneo in questo contesto ma non è casuale: molto spesso si esce dalla situazione concreta e particolare verso l'astrazione attraverso un'intuizione di tipo visivo, che parte dalla "rappresentazione mentale" che ci si è fatta della situazione e si appoggia sulle rappresentazioni grafiche in cui questa è stata tradotta. Le immagini mentali o reali, essendo compatte ed unificanti, sembrano supportare concezioni strutturali; in Hadamrd (1949) si trova un esplicito riferimento alla necessità dell'immagine: ``I need [an image] in order to have a simultaneous view of all elements ... to hold them toghether, to make a whole of them ...; to achieve synthesis ... and give the concept its physiognomy". La visualizzazione, quindi, rende le idee astratte più tangibili ed incoraggia a trattarle quasi come se fossero entità materiali. Anche la Sfard riconosce alle immagini la caratteristica di poter essere manipolate quasi come gli oggetti reali. La rappresentazione visiva è per sua natura olistica, e vari aspetti del concetto matematico possono essere esplorati attraverso un "accesso casuale", senza cioè dover seguire un ordine di accesso prestabilito. D'altra parte la visualizzazione ha una lunga tradizione in matematica e la lista di matematici famosi che ne fanno uso o che la evocano è molto larga, si pensi ad Eulero, che nonostante la sua cecità ne fa un costante riferimento, o ad Einstein e Poincarè, per citarne alcuni, e in educazione matematica recentemente in (Rösken & Rolka, 2006) viene sottolineate l'idea che "a picture is worth a 1000 words". La valenza cognitiva delle rappresentazioni grafiche anche come *linguaggio ponte* è stata più volte sottolineata in diversi lavori ((*D_1*)).
Le rappresentazioni grafiche, inoltre, possono esserci di grande aiuto nel capire che anche dietro ad operazioni cognitive che possono apparire come molto diverse (come l'addizionare o il sottrarre, o come il moltiplicare con le sue diverse accezioni nella varietà dei contesti) ci sia in realtà la stessa struttura. Il processo di astrazione, infatti, passa proprio attraverso il riconoscimento che strutture apparentemente diverse sono in realtà isomorfe: è dopo questo riconoscimento che si arriva ad avere confidenza ed impadronirsi della struttura per usarla all'occorrenza.
Il senso dell'individuazione di strutture formali sta nella capacità di "mettere in ordine" una molteplicità di situazioni concrete e contingenti, che possono in questo modo essere trattate "come se" fossero la stessa situazione (in questo senso le strutture formali ci aiutano a ridurre la complessità del mondo). La nostra esperienza di una situazione diventa così trasferibile ad altre.

La struttura emerge meglio proprio mettendo a confronto contesti diversi che però funzionano allo stesso modo[4], cogliendo invarianti nella varietà dei contesti.
Questo lavoro è stato fatto esplicitamente con i bambini, e viene fatto continuamente man mano che si passa ad una nuova attività.
Il nostro percorso si è sviluppato, quindi, nel proporre ai bambini diversi contesti e attività di problem solving accomunati da analoghe strutture formali. Attraverso le diverse esperienze su cui si è lavorato insieme, i bambini hanno avuto modo di vedere come la struttura del contare, la struttura additiva e la struttura moltiplicativa si costituiscono attorno ad alcune questioni fondamentali, che cambiano aspetto a seconda dei contesti, dei linguaggi e dei materiali usati, ma alla fine si rivelano sempre le stesse: la lunghezza dei passi e la quantità di riso contenuta in un cucchiaio, "incarnazioni" dell'unità di misura in due contesti molto diversi, si comportano in modo analogo, creano problemi simili, lo stesso accade con i fiocchi nella tenda matematica e i viaggi di pecore.
Questa modalità, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, è particolarmente utile per la verifica e il rinforzo dell'apprendimento: è, infatti, interessante vedere cosa succede quando, a distanza di tempo, ci si ritrova in una situazione già sperimentata.
Riguardo al problema dell'astrazione va menzionato un ulteriore aspetto fondamentale per questo lavoro: si tratta della necessità di concepire il passaggio dal concreto all'astratto non come un distacco definitivo, ma come un continuo percorso di andata e ritorno, che può essere messo in atto da ognuno quando ne senta l'esigenza. Mantenendo viva la memoria dei propri percorsi e la capacità di tornare alle radici concrete da cui si è partiti ci si può anche muovere con più sicurezza e disinvoltura nei campi più astratti, migliorando la comprensione ed eventualmente risolvendo dubbi anche nell'ambito di strutture complesse.

Struttura additiva

fig. 1



L'efficace metafora spaziale della struttura additiva in fig. 1 mette in evidenza uno schema di *compensazione*[5], in cui sono evidenti le relazioni tra le operazioni di addizione e sottrazione visti come due aspetti simmetrici della medesima struttura (sia in caso di discreto, che di continuo discretizzato, che di continuo): una volta compresa questa dinamica è possibile muoversi all'interno di tale struttura con maggiore sicurezza.
Anche Vergnaud concepisce la struttura additiva considerando simultaneamente i sui aspetti di addizione e sottrazione, ma nel suo approccio vi è un limite nell'uso dei numeri negativi, trattati come "tabù". Anche se storicamente i numeri negativi sono emersi molto tardi, da questo probabilmente nasce il tabù nella didattica, non è sempre vero però che l'ontogenesi ripete la filogenesi: i bambini di oggi vivono in un ambiente culturale in cui si scontrano non solo con

[4] Cfr., ad esempio, le attività "la ballata degli elefanti" e "il mostro del riso" descritte successivamente all'interno del paragrafo della struttura additiva.
[5] Cfr. J. Piaget.

rappresentazioni di numeri negativi, ma anche con situazioni in cui è utile imparare ad usarli. Nella nostra azione di ricerca abbiamo deciso quindi di superare questo limite, privilegiando un tipo di approccio olistico alla struttura additiva (Price, 2001).
A questo punto passiamo ad illustrare alcune delle attività usate nell'esplorazione della struttura additiva. Non riporteremo né l'ordine, né l'intero quadro di tutte le attività svolte, in quanto abbiamo scelto, come esplicitato nell'introduzione, di far emergere i punti cruciali e non dare un pacchetto precostituito di attività.

❖ La ballata degli elefanti

Questa attività, nata all'interno del progetto *<Capire si può>*[6], è costruita su un contesto di "movimento lungo una traiettoria", azione che trova corrispondenza con una delle metafore individuate da Lakoff e Núñez (2000) come basilari per la costruzione dell'aritmetica. Questa attività può essere considerata una "drammatizzazione" di questa metafora, e in quanto tale offre la possibilità di scontrarsi direttamente, anche attraverso il corpo proprio e altrui, con molti nodi fondamentali.
L'incontro si svolge in un'aula vuota, piuttosto grande, con il pavimento di piastrelle.
I bambini spontaneamente si dispongono in linea accanto, il conduttore del gioco (bambino o adulto) canta la filastrocca *<È la Ballata degli Elefanti / tre passi indietro, due passi avanti>* per indicare ai partecipanti le azioni da compiere, sostituendo di volta in volta al due e al tre dell'esempio i numeri che vuole - scelti con un intento preciso, oppure a caso, magari estratti a sorte, ma sempre piccoli all'inizio. Si gioca e si osserva cosa succede, "dove si va a finire": variando i numeri, aggiungendo altri ordini o producendone di "simmetrici", ponendo vincoli al movimento. Partendo da situazioni semplici la complessità del gioco cresce gradualmente lasciando i bambini sempre più autonomi nella scelta delle regole e dei ritmi.
Durante il primo turno sembra che abbiano interpretato il gioco proprio come una lezione di danza: si guardano molto l'un l'altro cercando di restare vicini e di andare a tempo, più che di fare il numero di passi indicato (ad esempio, ascoltando la filastrocca cantata[7], in corrispondenza delle parole «tr**é** passi indi**é**tro» sono chiaramente percepibili due accenti forti: i bambini non a caso fanno solo due passi, oppure ne fanno uno e poi lo chiudono unendo i piedi – comunque due azioni). Proviamo allora a dare una consegna "parlata" e dividiamo inoltre la classe in due gruppi, giocatori e osservatori, che successivamente si scambiano i ruoli. Dopo ogni turno chiediamo ai bambini di spiegare che cosa hanno fatto e che cosa hanno notato. Molti tendono a rilevare gli "errori" dei compagni, ma senza che questo implichi una valutazione negativa della persona o un'atmosfera competitiva.
Il primo nodo che affrontiamo è **l'arbitrarietà del riferimento spaziale (linea di partenza) e dell'unità di misura (lunghezza del passo).** La questione ha un aspetto in qualche modo paradossale che, se non esplicitato, spesso mette le persone in difficoltà: le cose più importanti, proprio quelle che servono per iniziare, sono arbitrarie, si possono anche scegliere a caso, tra infinite possibilità (anche se ci sono scelte più o meno comode, ma questo è già il passo successivo). Questa consapevolezza mette in luce il ruolo fondamentale dell'accordo intersoggettivo preliminare alla costruzione di qualsiasi modello matematico.
La scelta di proporre ai bambini la Ballata è stata inoltre motivata dalle occasioni che questo gioco offre quasi spontaneamente per lavorare sul passaggio, cruciale, **dall'azione al suo simbolo** (e viceversa), passaggio corrispondente proprio **alla reificazione di un processo in un oggetto astratto** descritto da Sfard: durante l'attività i bambini avvertono naturalmente la necessità di

---

[6] *<Capire si può>* è stato un pluriennale Progetto di Ricerca Nazionale per l'insegnamento delle Scienze e della Matematica nella scuola elementare, coordinato da P. Guidoni. Un report globale del progetto è attualmente in eleaborazione.
[7] Abbiamo cantato la Ballata sulla melodia della celeberrima canzone di Vinicius De Moraes e Sergio Endrigo "La Casa". Le parole della nostra filastrocca: «E' la Ballata degli Elefanti/ tre passi indietro, due passi avanti» corrispondono ai primi versi della canzone: «C'era una casa molto carina/ senza soffitto, senza cucina».

utilizzare segni o oggetti-simbolo per ricordare, per “trasformare” (attraverso un processo di traduzione ((*F*))) i passi in oggetti manipolabili, stabili nel tempo, numerabili, confrontabili.
Questo gioco è stato esplorato all’inizio della prima elementare e quasi da subito Giorgio osserva “*Marcello se ha fatto 3 indietro e 1 avanti ne ha fatti 2 indietro*”. In questo modo Giorgio comincia già ad utilizzare la struttura della Ballata per compiere delle operazioni, introducendo quella che chiameremo la “**questione del *come se*”,** questione che ricalca perfettamente lo schema di compensazione di fig.1 e che la classe sarà pronta a recepire solo al termine del terzo incontro. Emerge anche la più condivisa necessità di segnare la **linea di partenza** (con lo scotch rosso), come soluzione possibile: se non ci si ricorda da dove si è partiti non si può sapere se si è arrivati dove si doveva arrivare, non si può “tornare indietro” per controllare ciò che si è fatto. Già da questo momento alcuni bambini cominciano a chiamare la linea di partenza “zero”, nominano come “l’uno”, “il due” o “il tre” i luoghi in cui i loro passi li portano, e anche “il meno uno”, “il meno due” o “il meno tre” i luoghi dietro lo “zero”. Da questo filone di riflessioni nasce anche, pochi minuti dopo, l’idea di mettere un **segno per ogni passo** e più precisamente gettoni rossi per i passi avanti e blu per i passi indietro. La differenza tra il numero di gettoni e il numero che rappresenta il luogo da cui partono e finiscono gli spostamenti pone l’accento sul doppio aspetto di numero come stato e come azione, così come si incomincia inevitabilmente a scontrarsi con la sua doppia struttura di ordinale e cardinale.
L’altra questione che viene subito affrontata dai bambini è la differente maniera di fare i passi, c’è chi fa passi da formica e chi fa passi da elefante. La questione viene risolta da Lorenza “*se facciamo che i passi sono le mattonelle siamo **più giusti***”.
Stefano solleva nuovamente la questione del **“*come se*”**, pur senza averne l’intenzione; egli dà, infatti, per scontata la struttura della **“linea dei numeri”**, ne ha già un’immagine mentale molto chiara: senza fare i passi, posiziona i 6 gettoni rossi sulle mattonelle. Come è accaduto nel caso di Giorgio, la classe non sarà pronta tanto presto per accogliere i suggerimenti “all’avanguardia” di Stefano. E’ possibile tuttavia che la rappresentazione da lui proposta abbia agito “sotto la superficie” per poi riemergere al momento opportuno offrendo un esempio e un supporto per l’immaginazione agli altri bambini, nel momento in cui hanno cominciato a farsi domande sulla questione. Sarebbe interessante trovare dei modi per mettere alla prova un’ipotesi di questo genere, per capire meglio il ruolo svolto nel gruppo dai **“precursori (apparentemente?) inascoltati”**.

❖ Il mostro del riso

L’ altro aspetto fondamentale del contare è il **riconoscimento di un discreto preesistente** (per quanto riguarda gli individui) o **imposizione di un discreto formante** (nel caso delle sostanze continue)”. Quest’ultima questione è stata affrontata con il gioco del Mostro del riso, esplorato verso la fine della prima elementare.
Nelle nostre intenzioni c’era, infatti, l’idea di introdurre al più presto questo materiale perché le sue caratteristiche lo rendono molto utile per un percorso intorno al “**discreto e continuo**”: il riso nell’uso comune viene trattato come una sostanza continua in genere, si misura in cucchiai, in pugni, in piatti, o in chili, eppure i suoi chicchi sono chiaramente degli individui, abbastanza facili da vedere e manipolare come tali, anche se “un po’ troppo piccoli” e troppi di numero per essere “facili da contare” ad uno ad uno.
L’idea è stata quindi quella di presentare un contesto, chiaramente di natura diversa (passi-discreti, riso-continuo) in cui i bambini potessero incominciare a capire l’invarianza della struttura additiva nel passaggio da un contesto all’altro. Per dare senso al gioco e per divertirci di più, abbiamo inventato la storia del mostro, che comincia così: *ci sono quattro villaggi (ognuno costituito da 4 o 5 bambini), ciascuno dei quali vive sotto la minaccia costante di un mostro, al quale gli abitanti, coltivatori di riso, sono costretti a cedere una parte consistente del raccolto (ognuno deve dare quattro cucchiai di riso). Fortunatamente i mostri in questione non sono molto furbi e non hanno un buon servizio di sicurezza, così che la notte, mentre dormono, tutti gli abitanti dei villaggi possono intrufolarsi nelle loro tane e riprendere ciò che avevano ceduto durante il giorno.* Come è

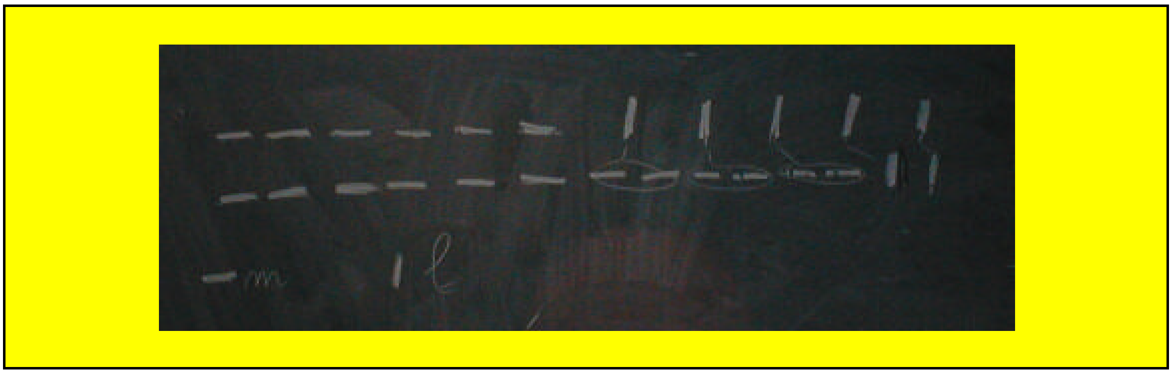
facile immaginare già dal primo turno di gioco è emerso il problema dei contadini che riprendono più di quanto hanno dato (cucchiai di riso più colmi), lasciando così in povertà i compagni. All'inizio i contadini impoveriti non riescono a capire bene la causa della propria disgrazia, né gli arricchiti hanno ben chiare le proprie responsabilità. Dopo molte riflessioni e prove i meccanismi cominciano a rivelarsi, e allora si può cominciare ad escogitare soluzioni.
E' centrale chiaramente, ancor prima della questione dell'**unità di misura**, la **conservazione della quantità** (Davydov, 1982): quest'idea, come risulta evidente dalle loro reazioni, è già presente nei bambini, almeno come "area di sviluppo prossimo", e si è andata esplicitando e rafforzando nel corso del gioco. Si è lavorato inoltre intorno allo **zero**, inteso come insieme (contenitore) vuoto, oltre che come punto di partenza (e di ritorno, quando tutto fila liscio) delle operazioni. Tutte queste questioni, affrontate già nella ballata degli elefanti, sono rincontrate dai bambini in un contesto apparentemente diverso, in cui è centrale la questione del discreto-continuo e in cui l'oggetto intermedio dei passi "lunghi quanto" diventa il cucchiaio "pieno quanto".

❖ Il problema dei mestoli

Come abbiamo anticipato, parte integrante dell'azione-interazione sono alcuni momenti di verifica, lontani nel tempo rispetto ai contesti di esplorazione della struttura, nei quali i bambini vengono posti davanti a situazioni abbastanza complesse in cui bisogna capire quale struttura operativa può tornare utile. In questo caso si tratta di una situazione di problem solving che coinvolge la struttura additiva, il problema viene proposto all'intero gruppo classe all'inizio della terza elementare:
un bottiglione si riempie con 6 mestoli e 5 litri, si può anche riempire con 2 litri e 12 mestoli. Quanti litri contiene un mestolo? Quanti litri contiene il bottiglione? Trova altri modi per riempirlo.
Dopo la lettura del problema incomincia la discussione di classe condotta dall'insegnante. Tutti bambini sembrano catturati dalla complessità del problema, che appare ai loro occhi come non banale e quindi tale da suscitare interesse, ma allo stesso tempo non fuori dalla loro portata e quindi tale da accettare la sfida. La discussione è da subito vivace e compaiono idee confuse, o che appaiono come tali, che hanno bisogno di essere chiarite per essere accettate dagli altri bambini. Così inizialmente il ragionamento di Stefano "*poichè 6 più 6 fa 12 e 2 più 2 fa 4, quindi ho ½. Poi 2 e ½ più 2 e ½ fa 5, perché 2 è l'intero e ½ sarebbe la metà, quindi 2 più 2 fa 4 e ½ più ½ fa 1 e quindi 2 più ½, più, 2 più ½ fa 5*" viene subito messo in discussione da Luca. È la stessa dinamica di classe guidata dall'insegnante a permettere al ragionamento, collettivo e individuale, di chiarirsi e svilupparsi. Attraverso questa dinamica le idee prendono forma proprio nel tentativo di chiarirle agli altri, e le parole di Luca sono emblematiche in questo senso "*Io non ho capito come ho fatto, ho pensato che 1 litro è un litro, ma un mestolo non so quanto è. Per me un litro è di più di un mestolo. Ma è facile, si può fare una somma, litri più mestoli e so quanto è il bottiglione. Io vedo che nella seconda maniera hanno messo 6 mestoli in più e invece 3 litri in meno. Ora però non so come continuare. Da una parte ci sono 6 mestoli in più e dall'altra 3 litri in meno* [chiude gli occhi]. *6 mestoli a quanti litri equivalgono? Equivalgono a 3 litri*". Evidentemente anche qui il ruolo dell'immagine mentale è centrale, Luca sembra ragionare proprio su un'immagine anche nella sua azione di chiudere gli occhi, che successivamente renderà rappresentazione grafica da condividere in modo da convincere gli altri[8]. La via della rappresentazione sembra quella, infatti, più gestibile in una dinamica di questo tipo, il disegno è meglio condivisibile e più immediatamente compreso dal resto della classe rispetto alla verbalizzazione narrativa di un ragionamento, ed è il modo con cui anche Stefano, precedentemente non preso in considerazione per la poca chiarezza del suo ragionamento, cerca di riscattarsi.

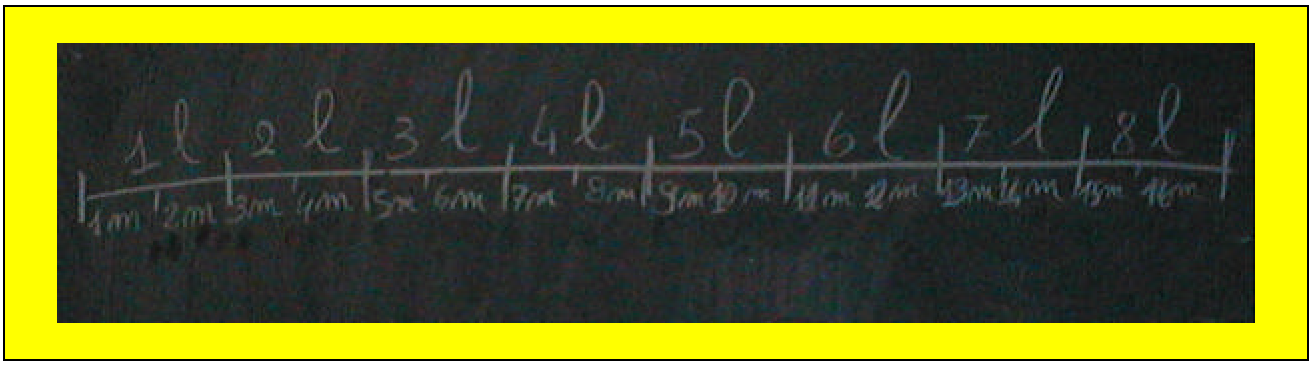
[8] Vedi appendice 1

fig.2 (rappresentazione di Stefano)



E’ interessante notare quanto la rappresentazione di Stefano sia vicina alla rappresentazione della struttura additiva nel caso di grandezze discrete, proposta all’inizio del paragrafo in fig.1. Si tratta, infatti, di un problema che pur trattando di grandezze continue, in quando quantità liquide, passa comunque attraverso una discretizzazione in unità di misura. Le due unità di misura, il mestolo e il litro, sono visualizzate come due grandezze diverse da Stefano che usa due simboli diversi per denotarle. Nella rappresentazione di Luca, invece, i mestoli e litri assumono più chiaramente il ruolo di diverse unità di misura di una stessa sostanza continua, discretizzata in due modi diversi.

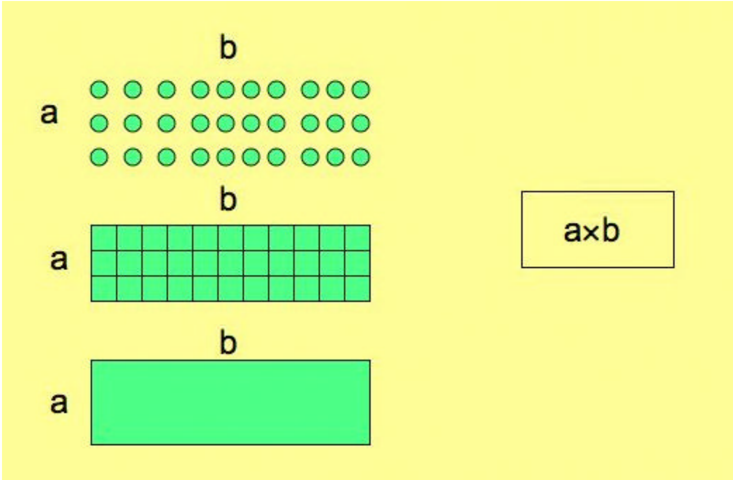
fig. 3 (rappresentazione di Luca)



In entrambe le rappresentazioni appare, come in trasparenza, lo schema proposto in fig.1, schema sul quale abbiamo cercato di sviluppare e costruire le diverse attività.

Struttura moltiplicativa

fig. 4



"*Le difficoltà principali nelle strutture moltiplicative si basano sulle proprietà dimensionali delle quantità e degli operatori coinvolti*" (Vergnaud, 1983).
La struttura additiva, come si è visto, opera con elementi appartenenti alla stessa classe, omogenei dal punto di vista del significato; essa è, infatti, facilmente rappresentabile attraverso uno schema di compensazione unidimensionale (fig.1), o anche attraverso uno schema lineare di spostamenti avanti e indietro su una linea (cfr. attività della "ballata degli elefanti").
La struttura moltiplicativa, al contrario, è organizzata su due dimensioni, generalmente, disomogenee, corrispondente ad una grandissima varietà di situazioni reali.
Questa forse è stata, ed è, la grossa difficoltà con la quale ci si scontra a livello di insegnamento-apprendimento, e con la quale si sono scontarti e si scontrano molti ricercatori in educazione matematica. La difficoltà è sempre stata quella di cercare un modello unico di moltiplicazione a cui riferire le diverse semantiche, nel quale i diversi prototipi reali potessero rispecchiarsi, di cui il primo esempio è proprio quello di addizione ripetuta.
Il primo illustre sostenitore del modello di moltiplicazione come addizione ripetuta è stato J. Piaget. In seguito diversi autori hanno cercato di evidenziare i pericoli di quest'accostamento. Davydov (1992), ad esempio, evidenzia come questo modello in realtà non riesce ad includere tutti i casi, e, considerando la moltiplicazione 2x1, provocatoriamente solleva la questione: "*cosa viene addizionato a cosa?*". Vergnaud (1983) suggerisce invece una teoria non uniforme di moltiplicazione, sceglie di classificare i problemi moltiplicativi in tre diversi sottotipi e afferma che ogni sottotipo richiede un distinto modello di moltiplicazione.
Recentemente Boulèt (1998) propone una nuova visione della moltiplicazione allo scopo di fornirne un unico modello, diverso dall'addizione ripetuta. Inspirandosi a Davydov (1992), definisce la moltiplicazione come *"riflessione dell'operazione di trasferimento da unità di misura più piccole a più grandi."*
Il nostro atteggiamento è anche in questo caso di cercare un modello che possa catturare la struttura della moltiplicazione, e da questo punto di vista il lavoro di Boulèt è nella stessa direzione. Probabilmente però nella nostra ricerca la definizione di Boulèt non risponde alla richiesta di avere un modello che sia facilmente riconoscibile anche dai bambini. In questo senso è ancora una volta una rappresentazione grafica, un'immagine, una metafora spaziale a tornarci utile; ci riferiamo alla disposizione a schieramento (in caso di discreto, continuo discretizzato e continuo) della fig. 4, nella quale, come nella struttura additiva, riconosciamo la struttura ritmica della moltiplicazione simultaneamente con la sua operazione inversa di divisione.
Nella moltiplicazione abbiamo riconosciuto come molto utile il concetto di "volte". La struttura ritmica delle "volte" accomuna la struttura del contare con la struttura moltiplicativa: da questo

punto di vista si può anche dire che il contare "normalmente", per 1, non è che un caso particolare della moltiplicazione (addizione ripetuta, ma con attenzione). *"Contare è fare un'azione"* (Andrea, prima elementare): si impara a contare, cioè il significato del contare, facendo operazioni, non solo operazioni additive, ma anche moltiplicative se dobbiamo contare per n.
A questo punto, analogamente a quanto abbiamo fatto per la struttura additiva, presentiamo alcune delle attività che hanno coinvolto i bambini nell'esplorazione della struttura moltiplicativa.

❖ La tenda matematica

Un modo produttivo per cominciare ad introdurre la struttura moltiplicativa è quello di "contare per n" (per 2, o per 3, o per 10, eccetera), situazione che abbiamo deciso di affrontare alla fine della prima elementare.
Messi davanti ad una collezione di oggetti abbastanza numerosa, magari tanto che non siano in grado di contarla, i bambini si rendono facilmente conto di come "contare un mucchio grande è più facile se si fanno dei gruppi". Inoltre, ogni volta che "si fa un gruppo" si può fare un segno sulla carta, oppure, in un primo momento, mettere in un posto preciso un oggetto-marcatore (per esempio infilare una perlina in un filo). In un'attività del genere è importante sottolineare la ritmicità dei gesti, delle corrispondenze, più che il numero di oggetti effettivamente contati. Anche se i bambini non saranno in grado da soli di calcolare il totale avranno comunque "contato" il mucchio, avranno "marcato lo stato": se non so contare fino a 80 ma so che ho 10 mucchietti da 8 figurine avrò comunque sotto controllo la situazione - per esempio mi accorgerò se ne ho persa qualcuna. Abbiamo riscontrato una grande soddisfazione dei bambini in questo tipo di attività, che se inizialmente ci è sembrata inspiegabile, poi è legata alla loro sensazione, inaspettata, di impadronirsi facilmente di uno strumento potente, che da un momento all'altro rende accessibile, controllabile una situazione che prima era vista come "inavvicinabile". Fin dall'inizio è stato importante far riflettere i bambini sulle strategie più convenienti da usare a seconda dei casi: molte sono state le osservazioni sul fatto che contare per 1 può essere una buona strategia soprattutto con delle piccole quantità, ma se il mucchio è grande può essere più conveniente raggruppare gli oggetti. Si può scegliere la numerosità dei gruppi valutando "a occhio" la dimensione del mucchio, oppure procedendo per tentativi, considerando magari in che modo si riesce ad evitare i resti, oppure quale numero di oggetti per gruppo è abbastanza piccolo da risultare "facile da contare" e contemporaneamente abbastanza grande da "far uscire" pochi gruppi. Procedendo in questo modo la struttura moltiplicativa presenta simultaneamente i suoi due aspetti di moltiplicazione e divisione, operazioni inverse: *"prendendo 8 gruppi da 3 oggetti sono arrivato a contare un mucchio di 24 oggetti"*, ma anche: *"vediamo in questo mucchio quanti gruppi da 3 ci stanno; e quanti da 4, o da 10?"*.

❖ Viaggi con le pecore

All'inizio della quarta elementare abbiamo coinvolto i bambini in un contesto che integra moltiplicazione e divisione. L'attività, videoregistrata, è iniziata con la drammatizzazione di una storia: ***Un pastore deve traghettare le sue pecore al di là di un fiume dove i pascoli sono più verdi e teneri. Il barcaiolo gli spiega che la sua barca può portare solo 3 pecore alla volta ed ogni viaggio costa 1 euro. Il povero pastore ha solo 4 euro e non vuole indebitarsi, così decide di portare solo un numero di pecore in modo da poter pagare al momento. Quante pecore possono essere traghettate con questi soldi?***
Con un disegno di gesso del fiume si divide in due il pavimento dell'aula, si sceglie tra i bambini chi "fa" il pastore, Giuseppe, e chi il barcaiolo, Stefano, mentre tutti gli altri "fanno" le pecore.
Si mettono in scena i viaggi: il barcaiolo lega le pecore a tre a tre, e, una volta traghettate le pecore, cerca di ordinarle in modo da ricordare come sono arrivate.
I modi di riordinare sono diversi, si possono lasciarle in mucchietti da tre, modalità che trova più immediato successo, ma poi, in maniera guidata, si passa agli schieramenti di fig.4.

La storia riprende: ***Dopo qualche giorno il pastore ha recuperato qualche soldo e torna dal barcaiolo con l'idea di far tornare le sue pecore all'ovile, questa volta però il barcaiolo ha una barca più grande che può trasportare 4 pecore alla volta, e il viaggio costa sempre 1euro. Quanti soldi dovrà dare il pastore?***
Anche in questo caso, una volta traghettate le pecore sull'altra sponda, si dispongono in modo da ricordare com'è avvenuto il viaggio.

Successivamente si torna in classe e si passa a rappresentare a schieramento le pecore con l'uso di portauova e fish, scandendo così un primo passaggio di astrazione tra pecore e oggetto che le rappresenta.

Con questi nuovi strumenti, rappresentando i viaggi e le pecore per viaggio, vengono inventate anche situazioni diverse con barche da 6 o da 12 pecore.
La metafora spaziale dello schieramento aiuta, in primo luogo, a scontrarsi con la forte bidimensionalità della struttura moltiplicativa che in questo contesto corrisponde all'intreccio delle tre grandezze: i viaggi, le pecore per viaggio e le pecore.

Inoltre il riconoscimento della proprietà commutativa avviene in maniera spontanea, infatti, Gaia, girando il portauova, dice soddisfatta: *"Si possono fare 6 viaggi con una barca da 2 pecore, ma anche 2 viaggi con una barca da 6 pecore"*.

Questa attività ci ha permesso inoltre di cominciare a giocare con i diversi contesti di divisione, infatti, se la prima parte del problema riguardava una moltiplicazione del tipo:

3 pecore/viaggio $\times$ 4 viaggi = 12 pecore,

e quindi una divisione del tipo:

12 pecore : 4 viaggi = 3 pecore/viaggio (*divisione di ripartizione*),

la seconda parte del problema coinvolge una divisione del tipo:

12pecore : 4pecore/viaggio = 3viaggi (*divisione di contenenza*).

Risulta complesso per un bambino riconoscere che queste diverse situazioni convergono alla stessa struttura, così come per lui è complesso comprendere l'algoritmo della divisione, basato solo su un tipo di *divisione di contenenza*. Se pensiamo anche al linguaggio con cui viene spiegato l'algoritmo della divisione è chiaro che prevale un tipo di semantica di *divisione di contenenza*, c' è un processo di sottrazione ripetuta testimoniato anche dall'intervento del resto. Questo modo di procedere nell'algoritmo non è necessario, ma risulta assolutamente comodo, e l'idea di proporre un'attività che permetta di affrontare diverse semantiche della divisione nasce dall'intento di capire che in realtà la scelta di un determinato algoritmo è strettamente legata a quella di una semantica più comoda per le diverse manipolazioni numeriche.

❖ Il problema del maiale

Alla fine della terza elementare è stata proposto un problem solving da risolvere nella discussione collettiva. Il problema è piuttosto articolato e coinvolge sia la struttura additiva che quella moltiplicativa:

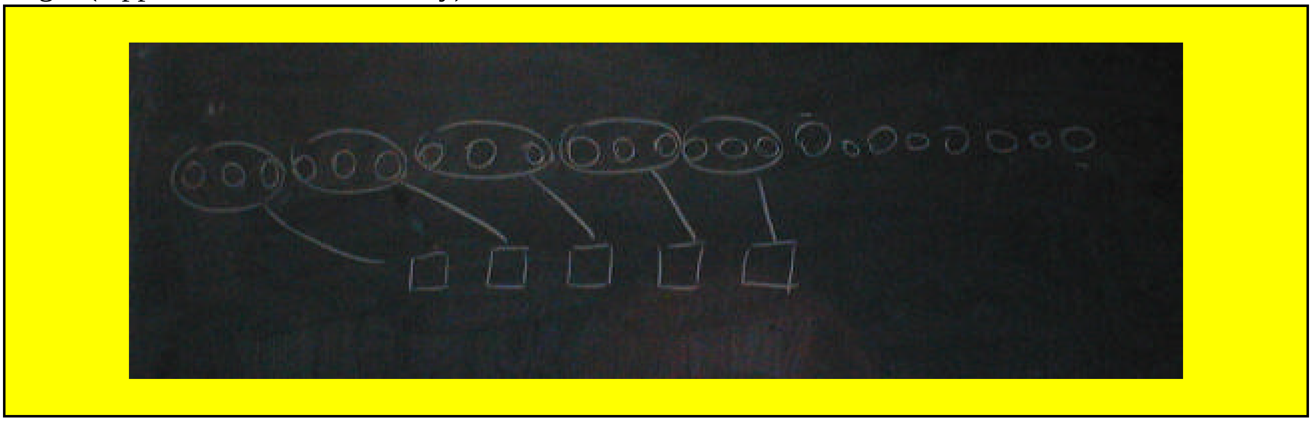
Il maiale intero pesa 100kg. Si tolgono due prosciutti da 7kg l'uno. La metà di quello che resta non è utilizzabile per mangiare. Dalla parte utile si levano 15kg di lardo. In tutto restano 5kg di grasso, oltre la carne magra. Nelle salsicce si mette sempre ¼ di grasso e ¾ di carne magra. Con tutto il grasso che resta, e con la carne che serve, si fanno salsicce. Quanti kg di salsicce fatte?Quanti kg di carne magra rimasta?

Il problema, diversamente dall'attività dei viaggi con le pecore, coinvolge una divisione che non è né di contenenza, né di ripartizione, ma bensì si tratta di un rapporto:

$$\frac{3/4 magra}{1/4 grasso} = \frac{3 magra}{1 grasso} = \frac{15 magra}{5 grasso}.$$

Già dal primo momento i bambini riconoscono la difficoltà del problema, anche se inizialmente la difficoltà è avvertita nella lunghezza e nell'articolazione della traccia, Tommy: *"Ma è difficilissimo questo problema, è lunghissimo*!", e anche chi non si scoraggia deve fare i conti con il fatto che la domanda finale sia molto lontana dai primi dati, Stefano: *"Allora dobbiamo fare 100kg,* [si blocca] *ma la domanda quale è?".* La maestra interviene per guidare i bambini rapiti dalla frenesia delle operazioni: *"Non dovete buttare i numeri a casaccio! I numeri non si buttano a casaccio. Abbiamo i pennarelli, l'abaco, il materiale multibase, quindi ci fermiamo e facciamo per bene 43kg meno 15kg".* Nonostante l'intervento della maestra, le quantità in gioco fanno scontrare i bambini con diversi problemi, Luca: *"[...]Non è possibile, perché la metà di 23 non esiste, perché 12 e 12 fanno 24."*, ma il pensiero collettivo si muove e subito ci si aiuta, Tommy: *" Sì, Luca esiste, perché è 11 e ½."*. Ma le difficoltà sono proprio di orientamento nella struttura, come si evince dalle parole di Tommy: *"Dobbiamo addizionarli?[…]Ma che bisogna fare con quel 1/4 e quei ¾?".* Dopo diversi faticosi passaggi le idee si cominciano a chiarire: *" ogni ¼ ci vuole 3/4, quindi la carne magra è 3 volte il grasso."*. Anche in questo problem solving, come era successo per il problema dei mestoli, è una rappresentazione grafica a chiarire le idee, d'altra parte anche Polya (1973), nella lista delle strategie euristiche per la risoluzione di problem solving, pone tra i suggerimenti centrali proprio quello di disegnare una figura.

fig.5 (rappresentazione di Tommy)



Conclusioni

Dopo un'attenta riflessione sia sulle questioni riguardanti la disciplina, intesa come riorganizzazione formale delle operazioni aritmetiche, che sugli schemi di azione che le coinvolgono, condotta sotto la guida esperta di P. Guidoni, abbiamo scelto dei modelli precisi a cui riferirci nella costruzione delle attività. Da questa fondamentale premessa è emersa la peculiarità del nostro approccio di partire dalle azioni dalle quali emerge la struttura, caratteristica che risulta essere contemporaneamente il suo punto di forza, ma anche il suo punto critico. Durante le attività e nella successiva analisi dei dati sono venuti fuori, sia momenti di naturale risonanza con il modello proposto, che momenti risultati più duri e meno immediati. Sicuramente il modo naturale con cui i bambini hanno incominciato ad usare i numeri negativi nel gioco della Ballata conferma l'efficacia di un approccio alla struttura additiva che li comprenda fin dall'inizio; e ancora, l'utilizzo della metafora spaziale di compensazione nella risoluzione del Problema dei mestoli, proposto molti mesi dopo i giochi che ne mostravano le caratteristiche, ci conferma la sua utilità e la sua facile interiorizzazione. Altro punto di forza ci è parso essere il naturale riconoscimento della proprietà commutativa della moltiplicazione, interpretata nelle sue sfumature semantiche, attraverso la metafora spaziale dello schieramento. D'altra parte la stessa metafora non è facilmente accettata da tutti i bambini che continuano spesso a preferire e ad usare più naturalmente una disposizione spaziale a raggruppamenti. Anche la metafora della linea dei numeri non è immediatamente compresa, particolarmente rilevante appare il blocco di Marcello nell'eseguire "tre passi indietro, due passi avanti". Marcello, fatti i primi tre passi indietro, non sa da dove partire per compiere i due passi avanti: deve tornare alla linea di partenza o può partire da dove si trova? Dal punto di vista di un adulto non c'è niente da capire nell'eseguire un comando di questo tipo, infatti, la "metafora dell'aritmetica come movimento lungo una traiettoria" è ormai interiorizzata tanto da non riuscire più a vederla come tale: ci sembra evidente che per fare "tre passi indietro, due passi avanti" ci dobbiamo mantenere su una linea immaginaria retta, che il punto di arrivo dei passi indietro diventa il punto di partenza per andare in avanti, che nel farlo dobbiamo "ritornare sui nostri passi", i quali, dunque, devono essere più o meno uguali tra loro. Per Marcello, e per molti altri bambini, qualcuno di questi passaggi non è né scontato, né naturale e da questo punto di vista Luisa sembra cogliere a pieno questa difficoltà: *"Marcello si è imbrogliato perché aveva fatto tre passi indietro e non capiva come li doveva fare avanti"*. Sembra che Luisa percepisca chiaramente come il blocco fisico, l'imbrogliarsi dei piedi, dello sguardo che non sa dove posarsi, siano la manifestazione di una difficoltà a livello cognitivo.

Queste osservazioni, scelte come esempio di molte altre che emergono diffusamente durante tutte le attività, ci sembrano ben commentate dalle parole dell'insegnante che nel rispondere, in una delle interviste, alla nostra domanda *"Quali sono seconde te le maggiori difficoltà che stanno incontrando i bambini durante il progetto?"* ci risponde *"Ma che significa per te "difficoltà"? Per me è un ostacolo difficile da superare. Ci sono dei momenti critici durante il progetto, che sono poi superati. Non è che i bambini hanno difficoltà: è che bisogna rispettare dei tempi, accompagnarli, fermarsi, tornare indietro per poi ricominciare, ritornare sui propri passi.* ***Tutto questo, che poi significa anche rendersi conto che "le cose non sono semplici", è fondamentale****"*.

Bibliografia

1) Boulet, G. (1998). On the essente of Multiplication, *For the Learning Mathematics* **18**, 3.

2) Butterworth, B. (1999). *Intelligenza matematica*, Ed. Rizzoli.

3) Correa, J.; Bryant, P. & Nunes, T. (1998). Young Children's Understanding of Division: The Relationship between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology*, Vol. **90**, No. 2, 321-329.

4) Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T.P. Carpenter, I.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 224-238). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

5) Davydov, V. V. (1992). The psycological analysis of multiplication procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics* **14**(1), 3-67.

6) Guidoni P., Mellone M., Pezzia M. (2005). Understanding basic arithmetics by "Resonance" approach: from addition to multiplication in first grade, SEMT '05, 123.

7) Hadamard, J.S. (1949). *The psychology of Invention in the Mathematics Field*, Princeton University Press, NJ.

8) Lakoff, G.; Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*, Basics Books, New York.

9) Orefice, P. (2006). *La ricerca azione partecipativa. Teoria e pratica*, Studi sull'educazione, Liguori.

10) Price, A. J. (2001). Atomistic and holistic approaches to the early primary mathematics curriculum for addition, PME 25, **4**-73.

11) Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princenton, NJ: University Press.

12) Rösken, B.; Rolka, K. (2006). A picture is worth 1000 words- the role of visualization in mathematics learning, PME 30, **4**-457.

13) San Diego, P. J.; Aczel, J.; Hodgson, B. & Scanlon, E. (2006). "There's more than meets the eye": analysing verbal protocols, gazes and sketches on external mathematical rapresentations, PME 30, **5**-17.

14) Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: reflection on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**: 1-36.

15) Sfard, A. (2000). Steering (Dis)Course between metaphors and Rigor: Using Focal Analysis to Investigate an emergente of Mathematical Objects, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. **31**, No.3, 296-327.

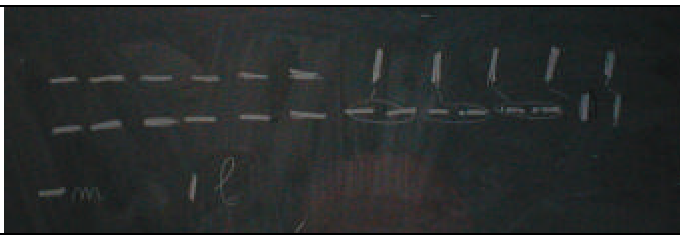
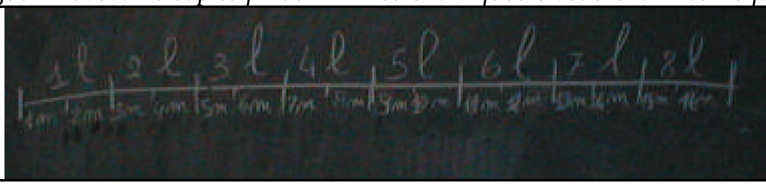
16) Vaccaro, V. (2005). Research and learning environment: the role of the teacher. SEMT '05, 323.

17) Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Lesh, R. and Landau, M.(eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Orlando, FL, Academic Press, pp. 127-174.

Appendici

1.Sbobinatura della risoluzione del problema dei mestoli

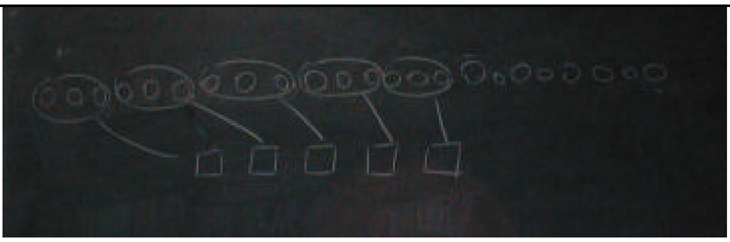
07	Stefano: poichè 6 più 6 fa 12 e 2 più 2 fa 4, quindi ho ½. Poi 2 e ½ più 2 e ½ fa 5, perché 2 è l'intero e ½ sarebbe la metà, quindi 2 più 2 fa 4 e ½ più ½ fa 1 e quindi 2 più ½, più, 2 più ½ fa 5.
08	Luca: non ho capito!
09	Maestra: Sì Stefano, non è chiaro quello che stai dicendo, perché non si capisce i numeri a cosa li stai riferendo. Proviamo a guardare meglio al problema, noi abbiamo detto che il bottiglione si riempie o con 6 mestoli e 5 litri o con 12 mestoli e 2 litri.
10	Luca: Io ho scoperto una cosa dicendo una cosa a Giulia e a Giorgio, spiegandogli il ragionamento del bottiglione, ho scoperto quanto contiene un bottiglione. Se facevo 6 + 5 andavo 11.
11	Maestra: Ma 11 cosa?
12	Luca: litri
13	Maestra: ma mestoli più litri che fanno litri?
14	Luca: litri
15	Stefano: Sì è litri!
16	Maestra: Perché dici di sì?
17	Luca: Ma forse tu intendi dire che il mestolo contiene più quantità del litro?
18	Maestra: io intendo che il mestolo è un mestolo che può essere di metallo, di plastica o legno, mentre il litro?
19	Luca: Ma anche il litro può essere di acqua o di cocacola o di fanta….
	RISATA
20	Maestra: Ma è sempre un litro, il mestolo può essere grande, piccolo…
21	Giorgio: Sì infatti 6 mestoli è due litri, se ogni mestolo contiene ½ litro. Si dovrebbe fare 5 litri più 3 litri oppure 2 litri più 12 mestoli che sono 6 litri, e quindi 2litri più 6litri.
22	Maestra: Ma io non ho ancora capito come siete arrivati a dire che 1 mestolo è ½ litro?
23	Tommy: Io visto con i miei occhi il 6 e sotto il 12, visto che 6 è la metà di 12 ho capito che 1 mestolo è la metà di un litro
24	Cristiana: E' azzardato questo calcolo
25	Maestra: Forse ha ragione Cristiana, hai preso 6 mestoli del primo bottiglione e i 12 mestoli del secondo e poi hai detto che quindi 1 mestolo è la metà di un litro.
26	Luca: Potevi fare prima la seconda domanda e poi la prima, visto che hai capito che in un bottiglione ci sono 8

	litri, poi potevi fare con delle prove, provavi prima con ¼, poi con ½…
27	Max: a me è venuto in mente di fare una riga che è il bottiglione….
28	Max: io avevo fatto due righe così, però..
29	Tommy: Ho scoperto, ho fatto 5 litri più 2 e ½ di litro
30	Cristiana: ma ti stai buttando ad indovinare.
31	Max: ma io volevo rispondere alla seconda domanda.
32	Maestra: Non è un caso che una seconda domanda, perché se non sai rispondere alla prima non puoi rispondere alla seconda, anche menarci ad indovinare è una maniera, è una strategia, però sappiamo che ci stiamo buttando ad indovinare
33	Luca: Facciamo quattro linee, 1 bottiglione quanti mestoli è? dobbiamo fare i mestoli tutti la stessa lunghezza…quanto deve essere lungo un mestolo, perché se facciamo un mestolo così e un altro così poi non ci troviamo più.
34	Max: no, facciamo tre linee.
35	Maestra: perché facciamo queste linee? Quanto è un litro?
36	Stefano: io lo so! è due mestoli! Un litro equivale per esempio a cento particelle d'acqua, un mestolo equivale a 50 particelle d'acqua.
37	Maestra: ma come avete fatto?
38	Giorgio: ma neanche io l'ho capito!
39	Luca: io non ho capito come ho fatto, ho pensato che 1 litro è un litro, ma un mestolo non so quanto è. Per me un litro è di più di un mestolo. Ma è facile si può fare una somma, litri più mestoli e so quanto è il bottiglione. Io vedo che nella seconda maniera hanno messo 6 mestoli in più e invece 3 litri in meno. Ora però non so come continuare. Da una parte ci sono 6 mestoli in più e 3 litri in meno [Luca chiude gli occhi]. 6 mestoli a quanti litri equivalgono? Equivalgono a 3 litri
40	Elena: Il primo bottiglione si riempie con 5 litri e 6 mestoli il secondo bottiglione si riempie con più mestoli e meno litri, precisamente 6 mestoli in più e 3 litri in meno.
41	Stefano: Posso disegnare come ho fatto io
	
42	Stefano: *Poi ho scoperto che 1 litro rappresenta 2 mestoli e poi gli altri litri sono uguali, quindi i bottiglioni sono uguali!*
43	Luca: *…che erano uguali l'avevamo capito fin dall'inizio! Ora vi faccio vedere la mia. Ho fatto i mestoli uguali.*
	
44	Luca:*Ho fatto 2 mestoli un litro, se qua arrivava …* ….la lezione continua, ma a questo punto le rappresentazioni grafiche convincono tutti.

2.Sbobinatura della risoluzione del problema del maiale

01	Luca: Due domande per una storia così lunga?!
02	Gaia: Ma questo maiale è più grasso di me!
03	Tommy: io peso 34kg, ci vogliono tre volte me per fare questo maiale!
04	Stefano: Allora dobbiamo fare 100kg, [si blocca] ma la domanda qual'è?
05	Tommy: Ma è difficilissimo questo problema, è lunghissimo!
06	Elena: 100kg meno 7kg fa 93kg, 93kg meno 7kg fa 86kg.
07	Stefano: 86kg meno 15kg…
08	Maestra: Aspettiamo un attimo, seguiamo le istruzioni! La metà di quello che resta non è utilizzabile per mangiare, saranno le ossa, i peli, la pelle. 86kg è quello che resta quando togliamo i due prosciutti. *"La metà di quello che resta.."*
09	Tommy: 50kg
10	Maestra: Ma hai saltato un passaggio " *Si tolgono due prosciutti da 7kg l'uno*"

11	Stefano: Restano 43kg, perché dobbiamo fare la metà di 86kg, gli altri 43kg si buttano!
12	Luca: Adesso dobbiamo fare che dalla parte utile dobbiamo togliere 15kg, devo fare 43kg meno 15kg di lardo.
13	Davide: Rimangono 25kg.
14	Maestra: Non dovete buttare i numeri a casaccio! I numeri non si buttano a casaccio. Abbiamo i pennarelli, l'abaco, il materiale multibase, quindi ci fermiamo e facciamo per bene 43kg meno 15kg.
15	Stefano: Fa 28kg
16	Elena: Sì, fa 28kg!
17	Maestra: "*In tutto restano 5kg di grasso, oltre la carne magra.*"
18	Gaia: La carne di quel maiale pesata è 28kg.
19	Tommy: 8 meno 5 fa 3, quindi 28 meno 3 fa 25, quindi 25kg. Ma che operazione bisogna fare? si dovrebbe fare 28 meno 5, perché ho 5 kg di lardo. Sono rimasti 23kg di carne magra.
20	Stefano: piano, piano
21	Luca: In questi 28kg c'era un poco di grasso e quindi abbiamo tolto 5kg di grasso e ci sono rimasti 23kg di carne magra
22	Maestra: "*Nelle salsicce si mette sempre ¼ di grasso e ¾ di carne magra*"
23	Tommy: Dobbiamo addizionarli?
24	Luca: Il maiale adesso ha 5kg di grasso e ¾ di carne magra, dobbiamo fare la metà, …¾ è 2/4, che sarebbe una metà intera, e un altro quarto, che sarebbe una mezza metà, metà della metà; [si blocca] Non è possibile, perché la metà di 23 non esiste, perché 12 e 12 fanno 24.
25	Tommy: Sì, Luca esiste, perché è 11 e ½. Ma che bisogna fare con quel 1/4 e quei ¾?
26	Stefano: Non mi convince perché le cosce del maiale sono 4 e noi ne abbiamo tolte solo 2!
27	Maestra :No, si tolgono solo quelle di dietro.
28	Luca: ¾ di carne magra, da 23 devo togliere ¾, però dobbiamo prima sapere…. ½ e 11 e ½
29	Maestra: "*Nelle salsicce si mette sempre ¼ di grasso e ¾ di carne magra*", che significa questa frase secondo voi? avete presente come è fatta una salsiccia? se tagliate una salsiccia ci sono dei pezzettini bianchi che è il grasso e il rosa che è la carne magra
30	Gaia: ¼ è il grasso e gli altri ¾ è tutto magro, un'intera salsiccia è fatta da ¼ di grasso e ¾ di carne magra.
31	Maestra: Secondo voi questi 28kg li usiamo tutti quanti?
32	Gaia: Il grasso rimasto si deve mettere con la carne magra rimasta.
33	Luca: Ecco perché io volevo togliere un ½ e ¼, perché se tu non lo togli non puoi sapere quanti kg hai.
34	Elena: Devo preparare la torta, prendi quello che ti dice, tipo 1/2kg di farina
35	Gaia: Ma ti rimane solo carne poi, perché il grasso è tutto usato. Perché sono i 5kg di grasso invece quelli della carne sono di più, e lo metti insieme e sempre la carne rimane.
36	Luca: C'è più carne magra, c'è due volte di più.
37	Tommy: ogni ¼ ci vuole 3/4, quindi la carne magra è 3 volte il grasso.
38	Gaia: Forse non rimane niente.
39	Luca: C'è sempre un po' di grasso.
40	Gaia: Però sempre un po' di carne magra.
41	Luca: Avanza un po' di carne.
42	Luca: Ma dipende da quanto pesa una salsiccia.. Noi facciamo una salsiccia e togli un po' di kg, mettiamo che 5kg è la salsiccia, dobbiamo mettere ¾ di carne magra.
43	Tommy: Ma la carne magra quanta è?
44	Luca: Però io vorrei vedere prima se rimane qualcosa dai 23kg di carne magra, perché se non rimane niente si devono metter tutti 23kg se no è diverso.
45	Gaia: La domanda ci fa pensare che devono rimanere.
46	Tommy: Secondo me, avanza!
47	Luca: Se non avanza, poi risolta l'una è risolta l'altra, se non rimane niente.
48	Gaia: Qualcosa avanza se no non la faceva questa domanda!
49	Luca: Ma la carne sarebbe avanzata o meno anche se non ci avesse fatto questa domanda, comunque sarebbe così quindi quella domanda non cambia niente!
50	Gaia: Perché se avanzava la carne comunque doveva chiedercelo!
51	Tommy: Mi trovo che vengono 5 salsicce. Avanzano 8kg di carne magra…. Aspetta… ognuna è 1kg. 23kg di carne magra e 5 di lardo, quindi ognuna è 1kg [Tommy fa una chiarissima rappresentazione alla lavagna]

	
52	Tommy: Ma poi degli 8kg di carne magra che ce ne facciamo?