Potenzialità di un apprendimento informale

Relatore: Maria Dedò

Torino, 10 Aprile 2015

LICEO D'AZEGLIO

matematita è un Centro di ricerca che si è costituito nel 2005, raccogliendo esperienze preesistenti che da anni esploravano le potenzialità di strumenti come mostre, libri, kit di laboratorio per le scuole, video, ecc

Punto di partenza:
è cruciale il momento dell'apprendimento informale e occorre quindi studiare come ottimizzarlo.
La formalizzazione certamente dovrà esserci, ma **soltanto dopo** che l'apprendimento informale si è consolidato

matematita

Negli ultimi anni si è ormai riconosciuto in maniera abbastanza unanime l'importanza di una modalità di apprendimento laboratoriale:

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, ***è elemento fondamentale il laboratorio****, inteso sia come luogo fisico sia come* ***momento in cui l'alunno è attivo****, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e* ***costruisce significati****, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi.*

Dalle Indicazioni Nazionali (2012)

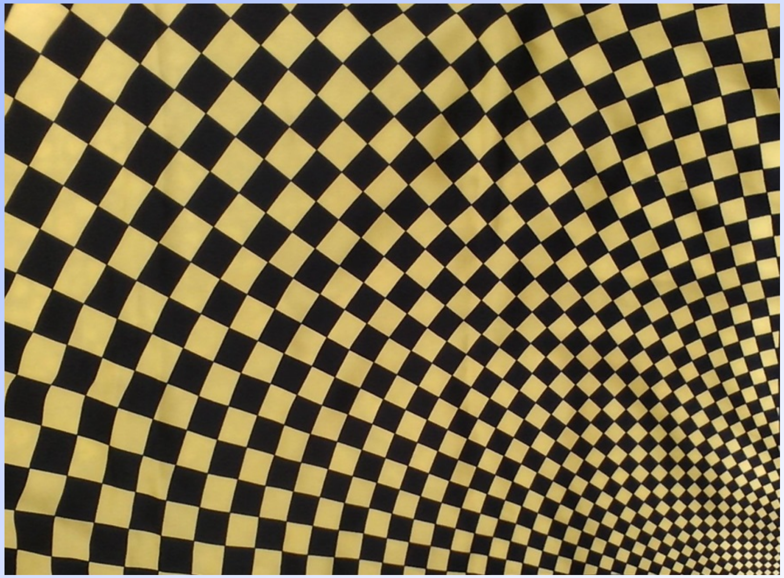
http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

a **tutti** i livelli di insegnamento, dalla scuola primaria ai licei (e anche oltre?!)

matematita

Si tratta di osservazioni non nuove!

Giovanni Vailati (1863-1909),
… una scuola in cui gli studenti non debbano "*imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono*" o "*ripetere delle parole prima di essere in possesso degli elementi sensibili e concreti da cui per astrazione si può ottenere il loro significato*".



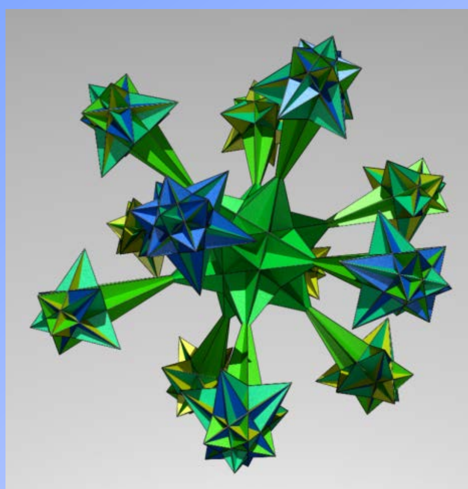
… Vailati, ma anche molti altri: Checcucci, Castelnuovo, …

… tuttavia tali osservazioni sono rimaste largamente poco applicate

matematita

La situazione da cui partiamo

Non si tratta soltanto di quello che i ragazzi **NON** sanno all'uscita di un dato segmento scolastico, e che sulla carta dovrebbero sapere, ma – e questo è ben più grave – si tratta di un **atteggiamento sbagliato** nel rapportarsi alla matematica.



Ossia!!!

8077. **IL NUMERO ESATTO**

1525ª PROVA D'INTELLIGENZA

Si tratta di determinare esattamente un certo numero, basandosi esclusivamente sul ragionamento, ossia senza alcun ricorso alla matematica. Esso è formato da dieci cifre tutte diverse fra loro, e quindi da 0 a 9. Con

La matematica dell'immaginario collettivo è noiosa, piatta, prevedibile e soprattutto banale. Invece la matematica è affascinante, è difficile e soprattutto è sorprendente.

Il Duomo di Pisa alto 1000 chilometri…

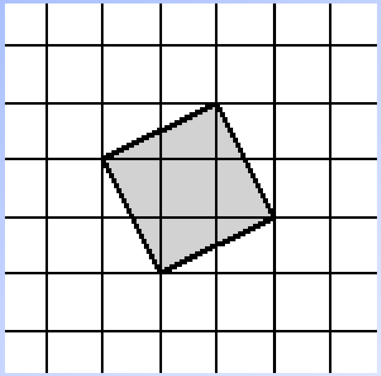
Il lato del Castello Sforzesco lungo 20 centimetri o 2 chilometri…

Radice di 5 al quadrato…

25x37x82x59 è un multiplo di 10?

le radici dell’equazione (x-7)(x-3)(x-57)=0

…



Realtà & Teoria Matematica…

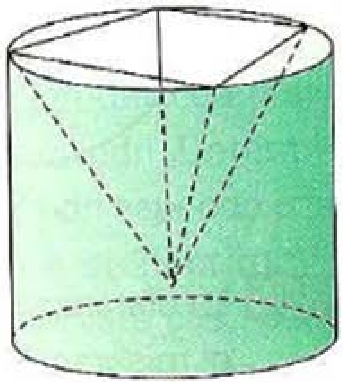
Ma che cos’è la “realtà“?

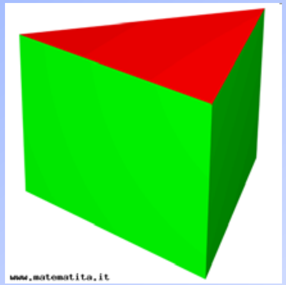
Non sarà anche colpa di certi problemi su pentole e portaombrelli…

… che esistono solo nei libri di matematica?

Un portaombrelli a forma d **cilindro** ha una cavità a forma di **piramide quadrangolare regolare**, con la base inscritta nel cerchio di base del cilindro. Calcola la misura dell'altezza della cavità, considerando che il volume della piramide è $\frac{1}{5}$ del volume del cilindro, che ha raggio ed altezza rispettivamente di 28 cm e 78 cm.

[R. 73,47 cm]





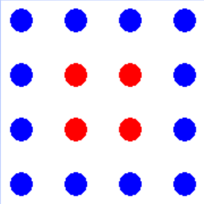
Una pentola ha la forma di un prisma retto che ha per base un triangolo equilatero; il lato del triangolo è uguale all'altezza del prisma ed è uguale a un metro. Calcolare…

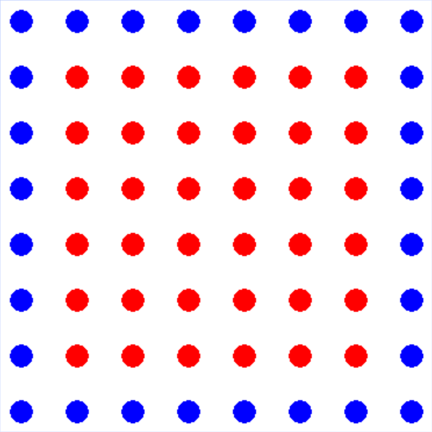
*«Alcuni studenti non sono per niente disturbati dal trovare che una barca è lunga 16130 piedi e l'età del capitano è 8 anni e 2 mesi, pur sapendo che questi è un nonno. Tale **trascuratezza dell'ovvio** non significa necessariamente stupidità, quanto piuttosto **indifferenza verso i problemi artificiosi**.»*

G. Polya ***How to solve it***

Come risolvere i problemi di matematica

Il denominatore comune a questi esempi sembra essere l'apprendimento meccanico e svuotato di significato.





Davanti allo stesso problema può succedere che le reazioni di un bambino di 8 anni (*ci prova; e a volte ci riesce*) siano più positive di quelle di un ragazzo di 15 (*se non lo collega a una «regola», non ci prova nemmeno*).

• **leggere il testo** del problema e cercare di farsene una pittura mentale **prima** di fare conti
• **dopo** aver finito, **controllare** il risultato (anche in base al buon senso…!)
• attivare ragionamenti di tipo **qualitativo**
• sviluppare **immaginazione** e capacità di visualizzazione
• padroneggiare esempi di **modellizzazione** (dal concreto all’astratto e dall’astratto al concreto…)
• …

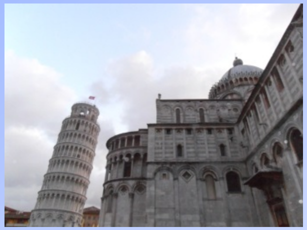
Sono tutte abilità che mirano a **dare un significato** a ciò che si sta facendo e che è più facile che si attivino nella discussione a piccoli gruppi su problemi in **modalità laboratoriale**.

Elementi di una didattica laboratoriale

lavoro a piccoli gruppi,
discussione paritetica,
ruolo attivo di chi impara

un diverso **ruolo del docente**

l'**errore**
e la valutazione

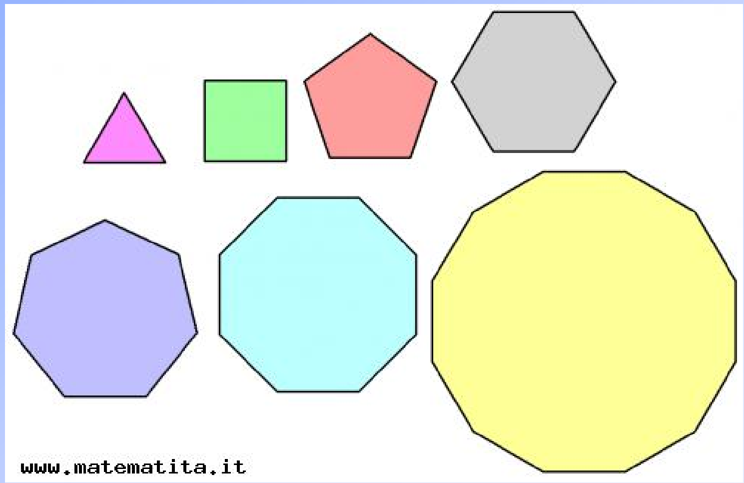


il **rigore** e il **linguaggio**

il confronto con il **concreto**: sperimentazione e **modellizzazione;**

matematita

Rigore e linguaggio



La matematica deve essere rigorosa?

Certamente sì, ma:

- rigore non vuol dire pedanteria
- rigore non significa usare parole «difficili» o usare formule: si può essere rigorosi parlando in italiano e non esserlo affatto parlando in «matematichese»

In una seconda artistico abbiamo risolto un'equazione e scritto alla lavagna "47=x". A voce ho detto "la soluzione è 47“. ***Molti*** *mi hanno chiesto se non dovevano però, prima di concludere che quella era la soluzione, "portare dalla parte giusta" ovvero scrivere che "- x=- 47" e poi cambiare i segni. … È una* ***lotta contro una specie di burocrazia!***

Dalla relazione di un animatore

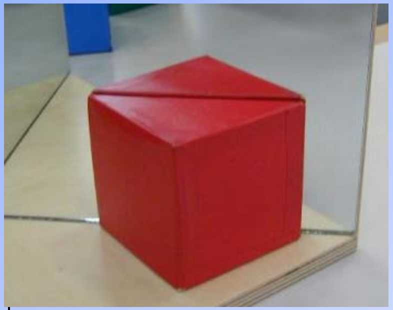
I bambini non avevano praticamente alcuna preconoscenza di geometria e non avevano alcun linguaggio impostato, ***interessante è stato proprio osservare come comunicavano****:*
"qual è la differenza tra quadrato e cubo?" "il cubo è gonfio"
"perché OSSO non si riflette uguale, mentre OTTO sì?"
"perché la S guarda di lato, mentre la T ti guarda dritta".
…

matematita

Dalla relazione di un animatore

…

I bambini sembravano sorprendentemente capire cosa stesse accadendo, più di ragazzi più grandi. Hanno capito subito come si ottenevano le porzioni di cubo per poi riflettere, anche se non conoscendo le frazioni si limitavano ad un "metà della metà", "metà della metà della metà" che, però, ***sottointendeva una maggior comprensione del processo*** *di ottenimento del pezzo.*



metà

metà della metà

metà della metà della metà

matematita

Rigore e linguaggio

Che cosa vuol dire «essere **abbastanza** rigorosi»?
Occorrono patti chiari.

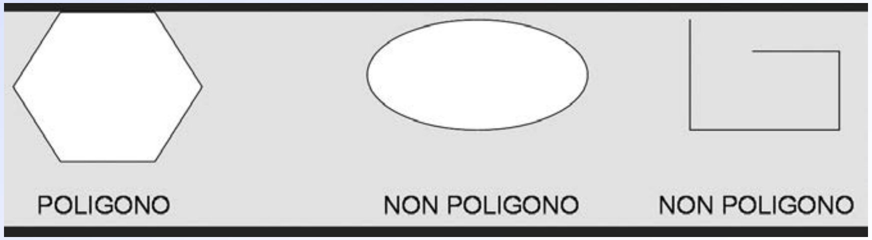
Il contesto laboratoriale facilita il fatto che la domanda sia presa per il verso giusto.
In una discussione **paritetica** lo scopo è chiaro ed è quello di farsi capire.

matematita

Astratto e concreto: la scelta dei materiali

- Non è un dettaglio trascurabile, ma è parte integrante della struttura del laboratorio.
- Un esempio: classificare i poligoni. La stessa attività con poche forme non avrebbe proprio alcun senso.

È «accettabile» una definizione informale di poligono del tipo: «questi sì e questi no»? Dipende (da quanti e quali sono gli esempi)!



Certo non così!!!

matematita

Astratto e concreto: l'uso di modelli

I am never content until I have constructed a mechanical model of the subject I am studying. If I succeed in making one, I understand; otherwise, I do not.

William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907)

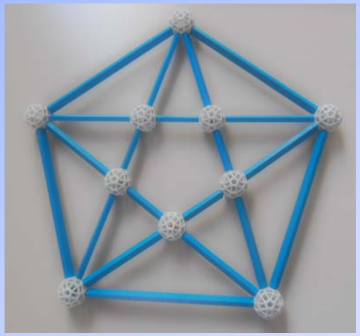
… ricorda quello che scrive un insegnante a proposito di un problema di *Math.en.Jeans*

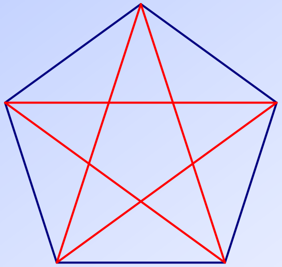
La classe (II media) ha avuto molte difficoltà a capire il significato del progetto e che cosa si chiedeva loro di fare: … solo nel momento in cui hanno cercato di costruire dei modelli concreti per verificare le loro ipotesi si sono resi conto delle difficoltà dei concetti che stavano maneggiando.

matematita

Concreto e astratto

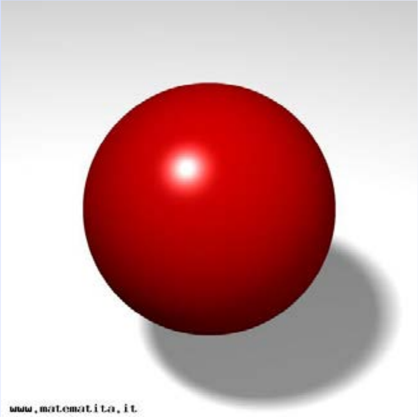
Quanto è lunga questa bacchetta?





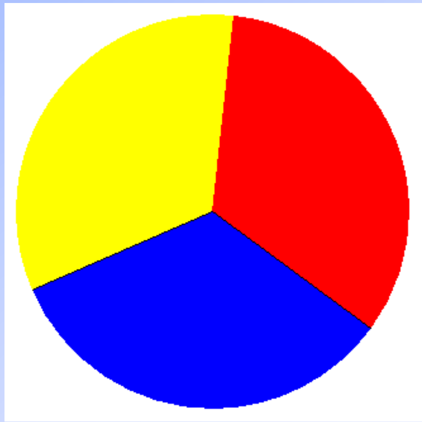
I bastoncini sono necessari, ma occorre curare la costruzione di **ponti** tra segmenti e bastoncini

Immagini mentali:
in una comunicazione non paritetica insegnante e studente si riferiscono (spesso) a immagini mentali **diverse**

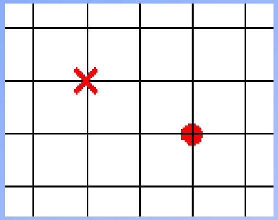


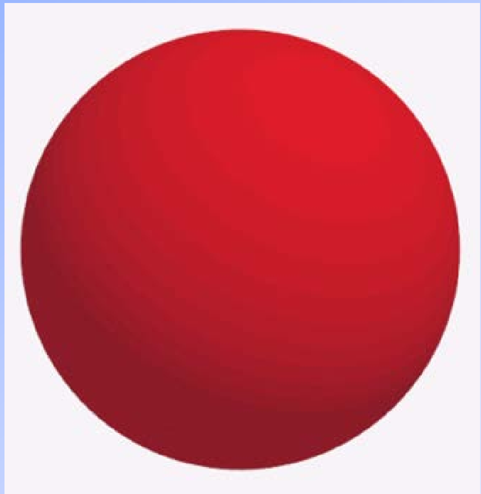
matematita

Concreto e astratto



Che cos'è un punto?





E qui è proprio il legame con il "mondo" che fa la differenza rispetto all'aberrazione della ***immagine di un punto, fortemente ingrandito*** (dida di un cerchio rosso che occupa un'intera pagina, in un testo di scuola media)

matematita

Il ruolo degli insegnanti

Non c'è dubbio sul fatto che il ruolo degli insegnanti è cambiato e che il loro compito è diventato **più difficile.**

Occorre ripensare formazione e supporti.

Non dovendo fare una lezione frontale, ma dovendo "solo" tenere le fila di un laboratorio, l'insegnante può toccare con mano dove e come risulta necessario quel "qualcosa in più" che deve sapere rispetto a ciò che insegna: per **preparare il materiale**; per **indirizzare il lavoro** dei ragazzi; per **cogliere al volo uno spunto** offerto dal commento di un gruppo, o anche da un **provvidenziale errore** di qualcun altro.

Ci sono discussioni che, imposte a freddo dall'alto, lasciano il tempo che trovano e vengono subito dimenticate, mentre se nascono nel concreto del lavoro dei ragazzi risultano estremamente significative.

Il ruolo degli insegnanti

Non solo in Italia si avvertono questi cambiamenti.

Irwin Kra *(Math) Teachers are the Key*
Notices AMS, vol. 59, n.4, aprile 2012

*… The truth is that **different sets of math skills are useful for different careers**, and our math education should be changed to reflect this fact. … No one knows what the future will demand of our scientists and mechanics. It makes sense to **expose everyone to as vast a mathematical landscape as possible**…*
*… always keep in mind that **good teachers are the key**. To put good math teachers in the classroom, **society must expect more from them, must pay them more, and must give them the support and respect they deserve**.*

matematita

Sbagliando si inventa

Occorre essere **coerenti** quando si dice che l’errore è prezioso e che dall’errore si impara! Non basta dirlo!

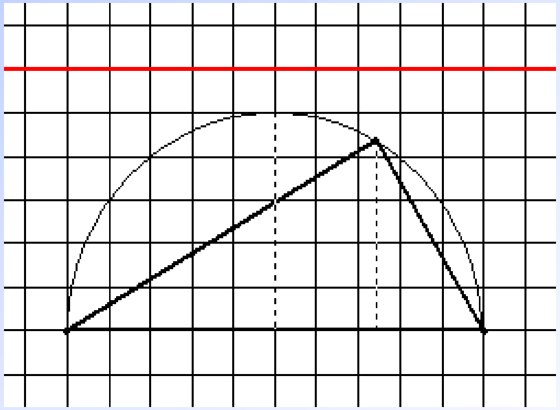
Potenzialità dei problemi spiazzanti al fine di combattere gli automatismi e l’uso meccanico degli strumenti appresi

Necessità di momenti in cui i ragazzi sappiano con certezza che non «*tutto quello che diranno sarà usato contro di loro…*»

matematita

Una preziosa raccolta di problemi di V. I. Arnold

Arnold: *Problems for children from 5 to 15* http://imaginary.org/
Tradotti in italiano alla pagina
http://imaginary.org/sites/default/files/5to15_it_it.pdf



Un problema standard in una scuola americana: l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 10 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa di 6 cm; trovare l'area del triangolo. Gli studenti hanno affrontato questo problema per più di un decennio (trovando 30 cm^2 come risposta). Ma gli studenti russi arrivati da Mosca non sono riusciti a risolverlo come i loro colleghi americani. Perché? (**vedi figura!**)

matematita

Il problema della valutazione

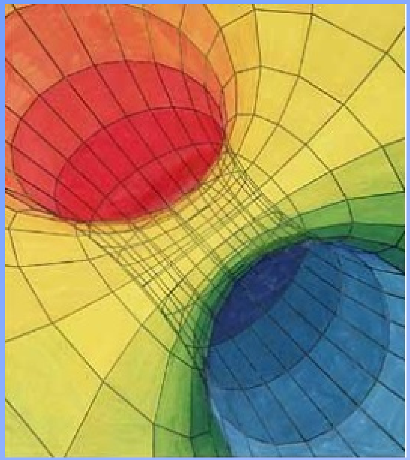
(almeno) quattro aspetti molto diversi (in un contesto informale tipo quello che abbiamo descritto):

- tirar le fila del lavoro fatto (**sì**; cruciale!);
- valutare il lavoro dei ragazzi (**no**; o almeno **non attraverso una conta degli errori**!);
- valutare il percorso fatto (possibilmente in una discussione fra **più** insegnanti);

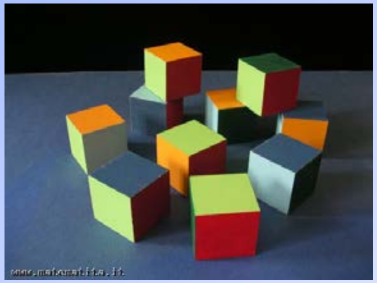
- valutare gli **effetti a lungo termine** (non facile; va studiato come; è naturalmente la cosa più significativa)

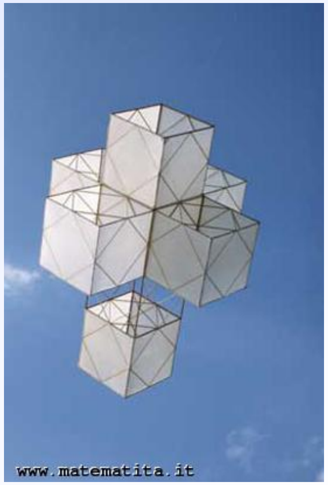
matematita

I contenuti: il problema del problema



- tema **profondo**, cioè matematicamente significativi (pur se lasciato a livello informale)
- tema leggibile a **livelli diversi**
- tema **coinvolgente**
- **elementare**, cioè che usi pochi prerequisiti; (**ma** elementare non è sinonimo di facile)
- che tenga presente il **percorso globale**
- che **crei ponti** piuttosto che muri





matematita

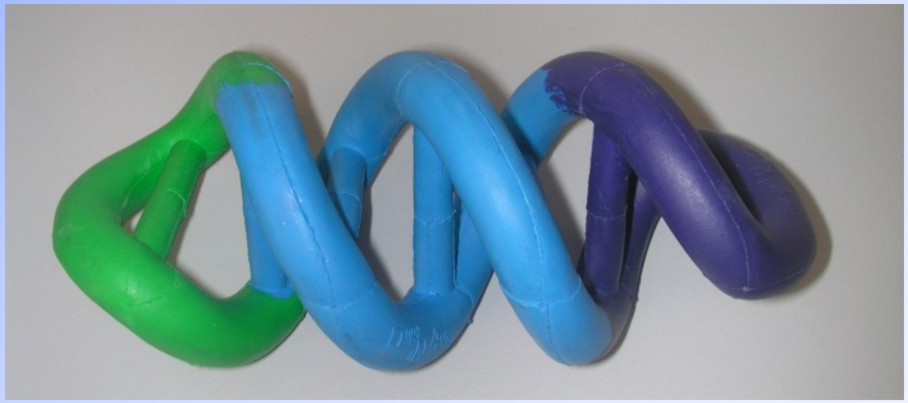
Il problema del problema: facile o difficile?

La iattura della facilitazione continua: per facilitare le cose, le si fanno a pezzetti, e poi a pezzetti ancora più piccoli, con il risultato che diventano più difficili perché **si sposta l'attenzione dalle idee alla tecnica**.
Occorre fare il viceversa!

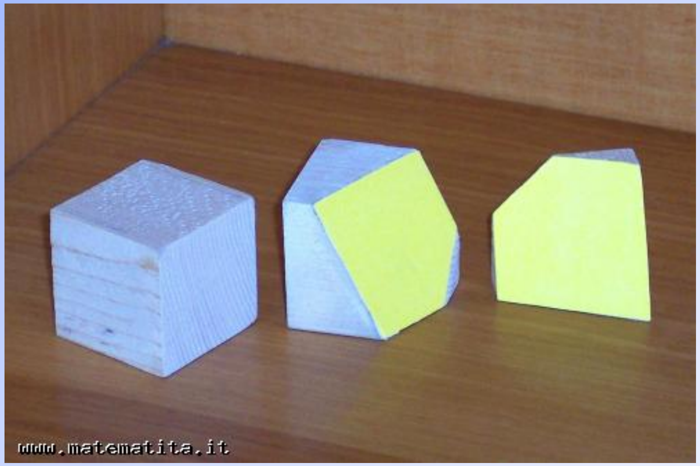
- I problemi difficili esistono!
- Il "facile" può essere più difficile del "difficile" …
- Non confondiamo ciò che può essere facile/difficile per noi con ciò che è facile/difficile per i ragazzi

When the idea is clear, the formal setup is usually unnecessary and redundant… we need to put far greater effort into communicating mathematical ideas. To accomplish this, we need to pay much more attention to communicating not just our definitions, theorems, and proofs, but ***also our ways of thinking****. We need to appreciate the value of different ways of thinking about the same mathematical structure. … What we [mathematicians] are producing is human understanding. We have many different ways to understand and many different processes that contribute to our understanding.*

William Thurston (1946-2012)



Only non interesting problems might be formulated unambiguously and can be solved completely
Henri Poincaré



corollario…
i temi proposti a un laboratorio devono essere interessanti, **quindi** sono necessariamente formulati in modo un po’ ambiguo e sarà difficile poterli risolvere completamente…

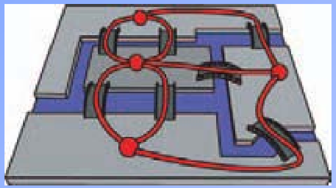
matematita

Il problema del problema: qualche esempio…

Si tratta di esempi di temi intorno ai quali è possibile costruire percorsi laboratoriali che insieme:

- sono declinabili a livelli diversi
- si possono agganciare alla realtà
- vanno a toccare nodi concettuali rilevanti

Tassellazioni…



Grafi…

Poliedri…

Simmetria…

Ombre…

Similitudini…

Carte geografiche…

matematita

Il problema del problema
Un esempio: i poliedri

Un'occasione per passare dalla geometria "rigida" alla geometria "molle"… la relazione di Eulero

… non solo per "contare": sono tante le conseguenze "curiose" e significative della relazione di Eulero che si prestano a piccole dimostrazioni

matematita

Quanti **esagoni** ci sono in un pallone da calcio? ***Non lo so***

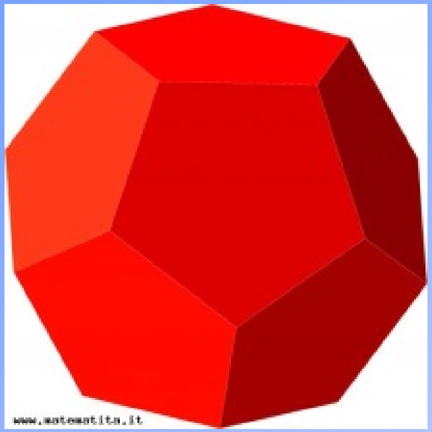
Quanti **pentagoni** ci sono in un pallone da calcio? **12**

Quanti **esagoni** ci sono in una pallina da golf? ***Non lo so***

Quanti **pentagoni** ci sono in una pallina da golf? **12**

matematita

Se le facce di un poliedro sono solo pentagoni e esagoni e in ogni vertice ne arrivano esattamente tre, allora il numero dei pentagoni è 12



$k = 0$

$k = 20$

NB Per qualunque intero k, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e k esagoni

matematita

Se le facce di un poliedro sono solo pentagoni e esagoni e in ogni vertice ne arrivano esattamente tre, allora il numero dei pentagoni è 12

$F = P+E$

$3V = 2S$

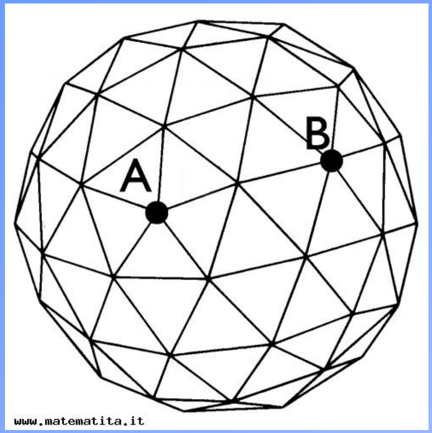
$$6P+6E = 6F = 6S-6V+12 = 2S+12$$

$V-S+F = 2$

$5P+6E = 2S$

$6P+6E = 2S +12$

$P = 12$

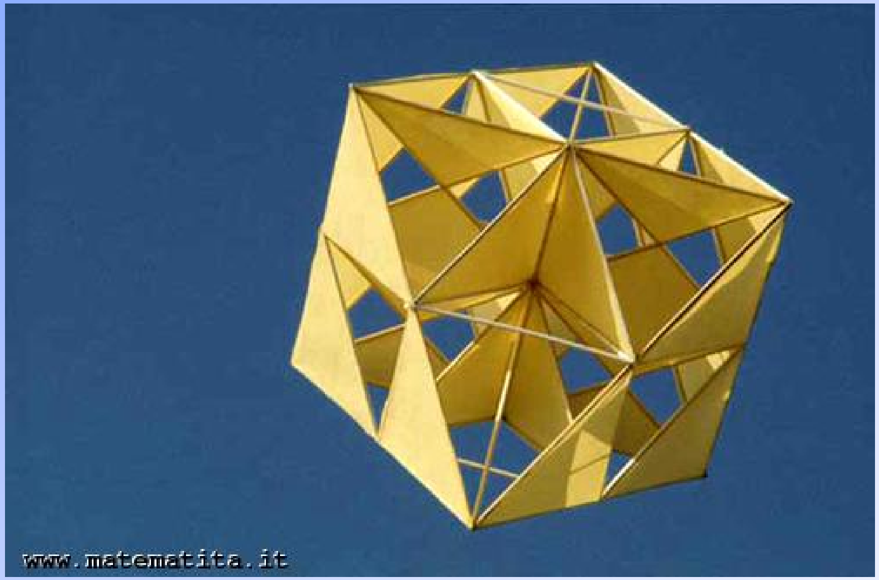


Dualmente…

Se in un poliedro tutte le facce sono triangoli e in ogni vertice ne arrivano o 5 oppure 6, **allora** il numero dei vertici in cui ne arrivano 5 è **12**.

matematita

È molto diverso dimostrare una cosa di questo tipo rispetto a dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali fra loro!



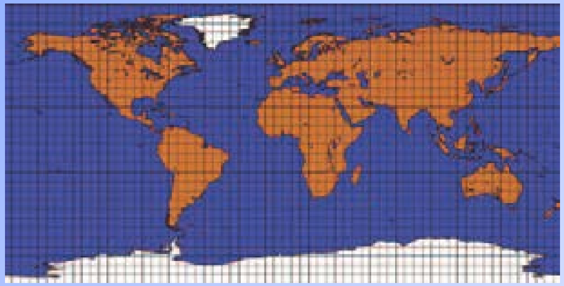
Una dimostrazione **non serve assolutamente a nulla**, se non si è prima creata **l'esigenza** che qualcosa **debba** essere dimostrato!

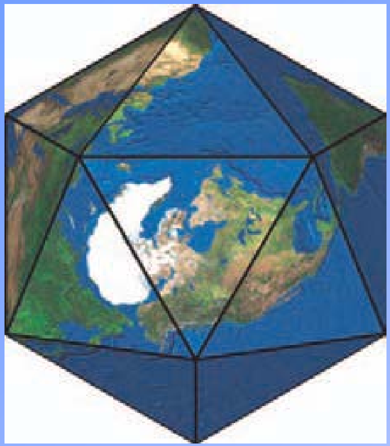
Dalle indicazioni per i licei:

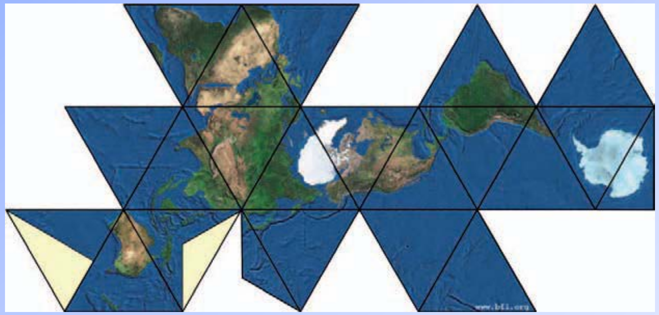
Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il ***significato dei concetti di*** *postulato, assioma, definizione, teorema,* ***dimostrazione****, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo* ***non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.***

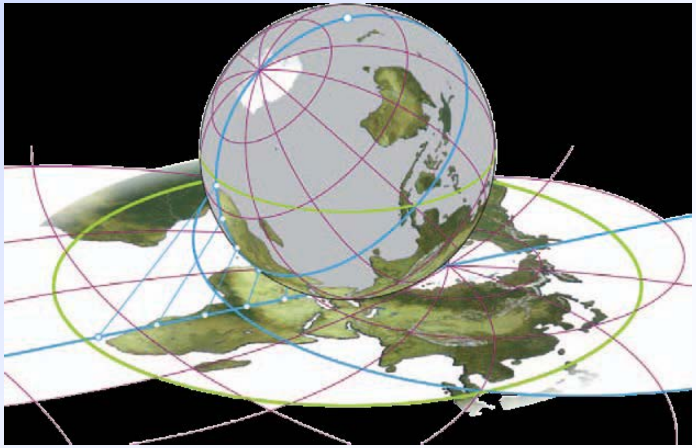
In sintesi, l'indicazione principale è: **pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.**

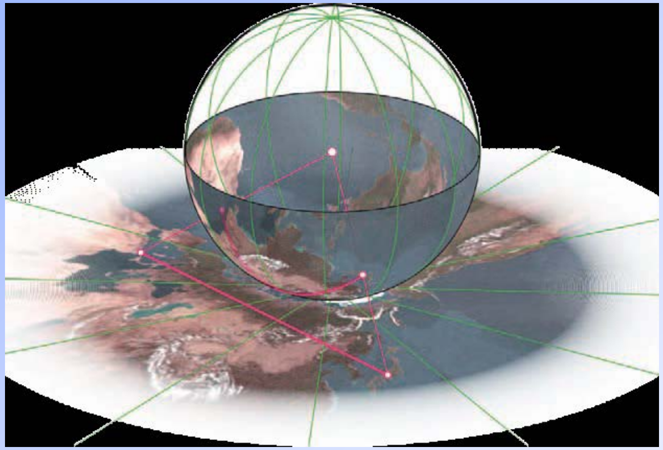
Il problema del problema.
Un esempio: le carte geografiche





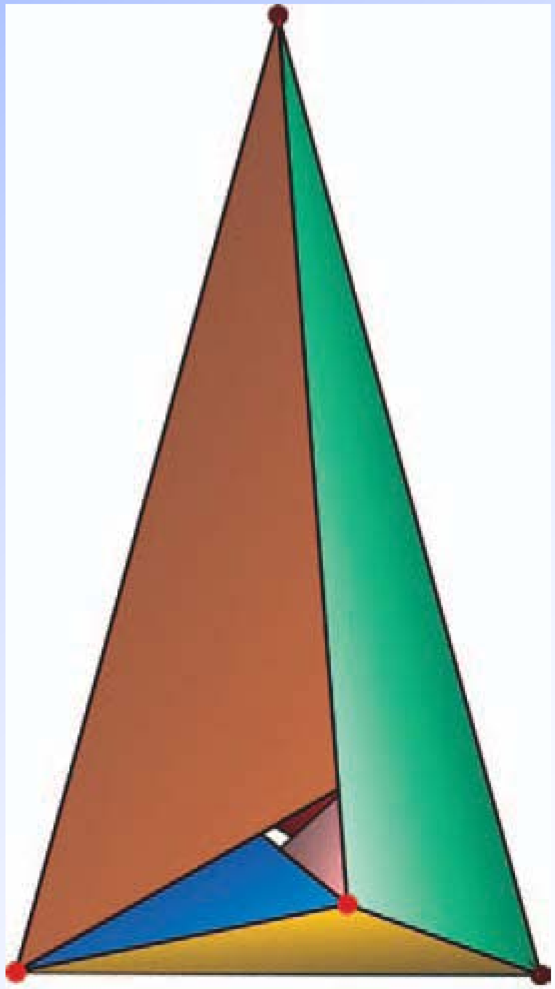






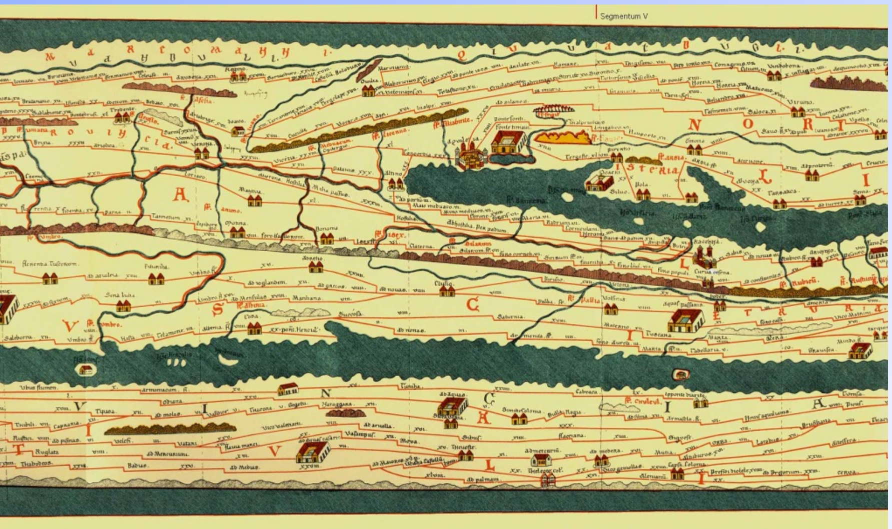
Dalle proiezioni…

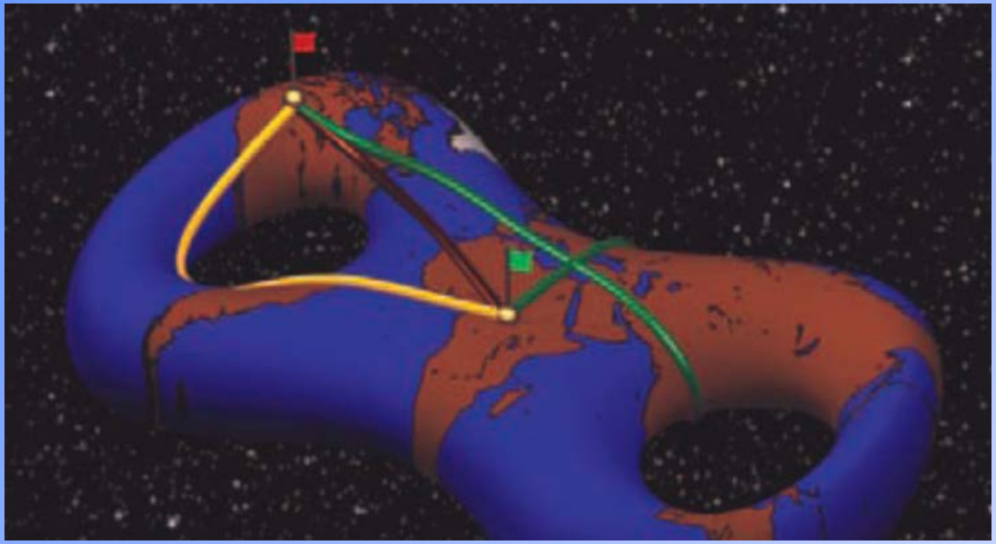
… alle colorazioni

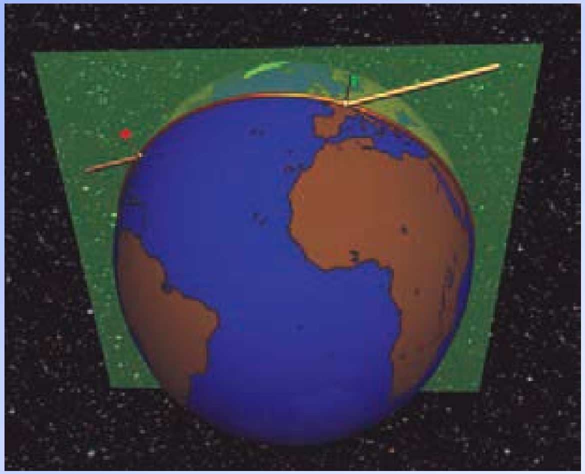


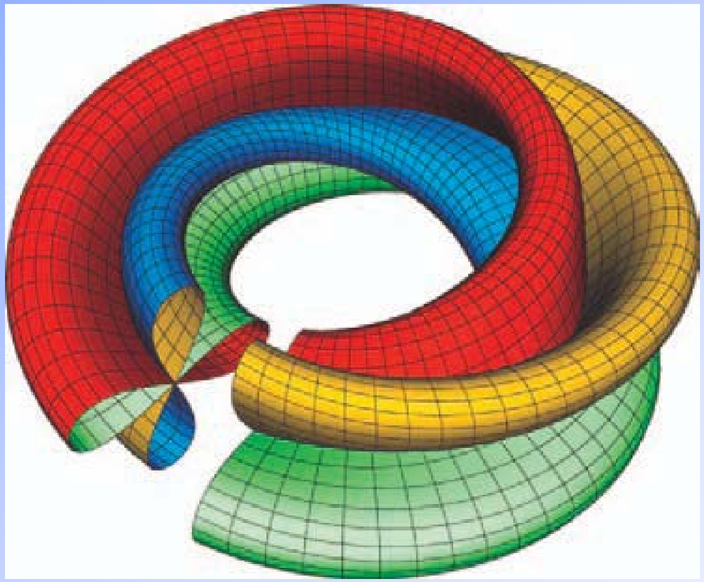
… all’idea della cartografia come modello per rappresentare la realtà:
dal disegno alla funzione da sfera a piano…

per avere un buon modello occorre **ignorare** alcune informazioni





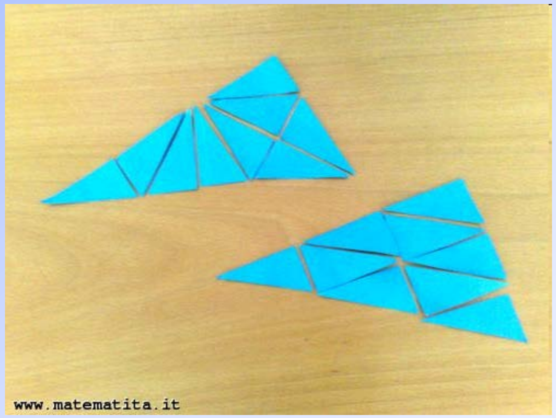


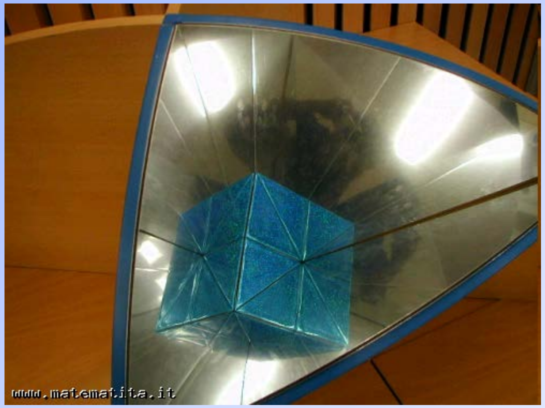


… alla fantascienza…
“raccontare una storia” (bene) può allargare i confini del “mondo” e ci permette di usare anche i mondi della fantascienza se dovessero esserci più utili…

Il problema del problema
Un esempio: la similitudine

la similitudine non sono
solo i triangoli simili!

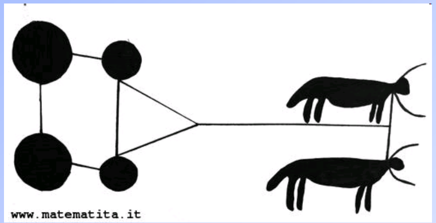


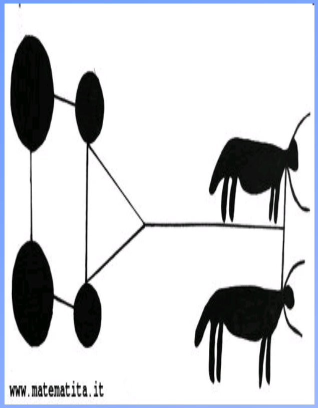


Come variano aree e volumi in una similitudine…

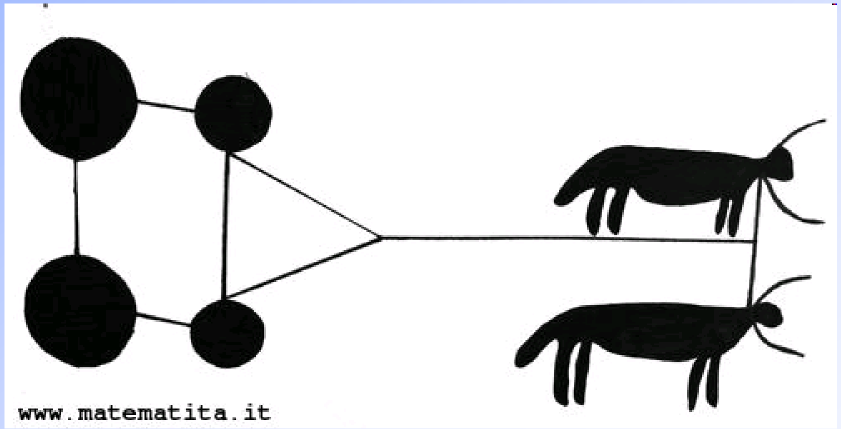
matematita

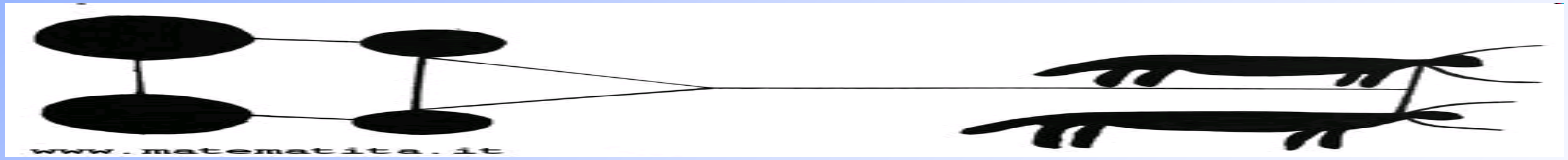
Nei nostri laboratori sulla similitudine i ragazzi sembrano non collegare la nozione di similitudine al fatto di "avere la stessa forma".





Cesura tra formale e informale!





… in fondo si tratta di operazioni che i ragazzi sono abituati a fare trattando le immagini su un pc.

Realtà & Teoria Matematica…

Cercare legami con la "realtà" significa anche recuperare le cose che i ragazzi **già sanno fare**

matematita

Il problema del problema
Un esempio: le ombre

Sono l'ombra di cosa?

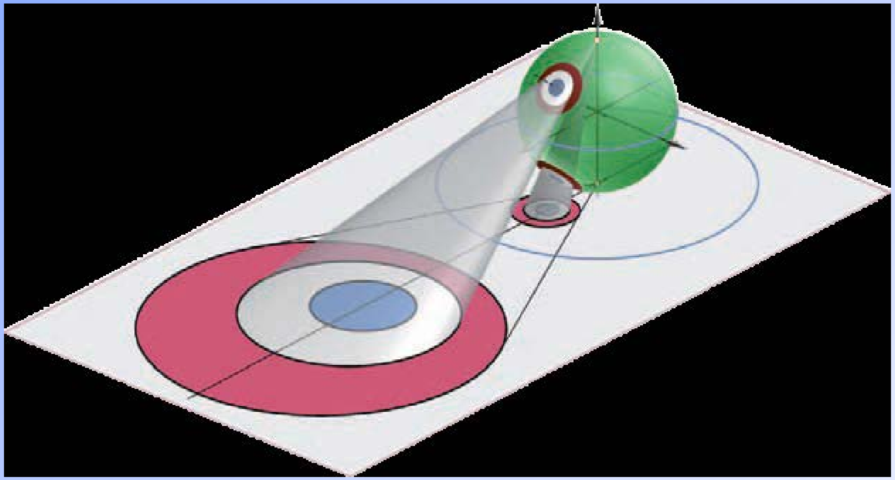
È un bel problema perché (come sempre accade quando dietro "c'è sostanza") può essere gestito **a livelli diversi**.

matematita

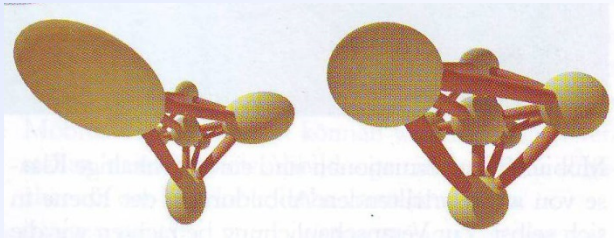
Si può solo osservare e incuriosire (e non è inutile!!); … oppure si può entrare nel merito e cominciare a studiare (per esempio) le coniche.
Oppure… tante vie di mezzo.

matematita

E volendo si può andare oltre…



… e il fatto che **si possa** andare oltre dà sostanza anche se poi oltre non si va!



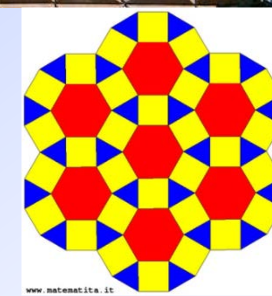
matematita

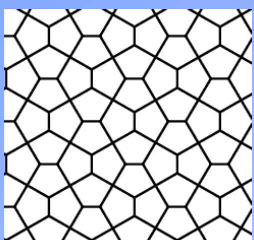
Il problema del problema.
Un esempio: le tassellazioni

matematita

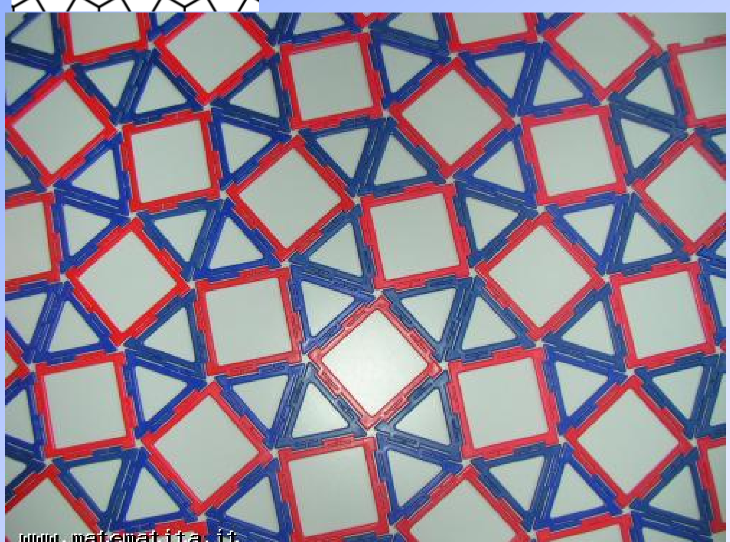

www.matematita.it

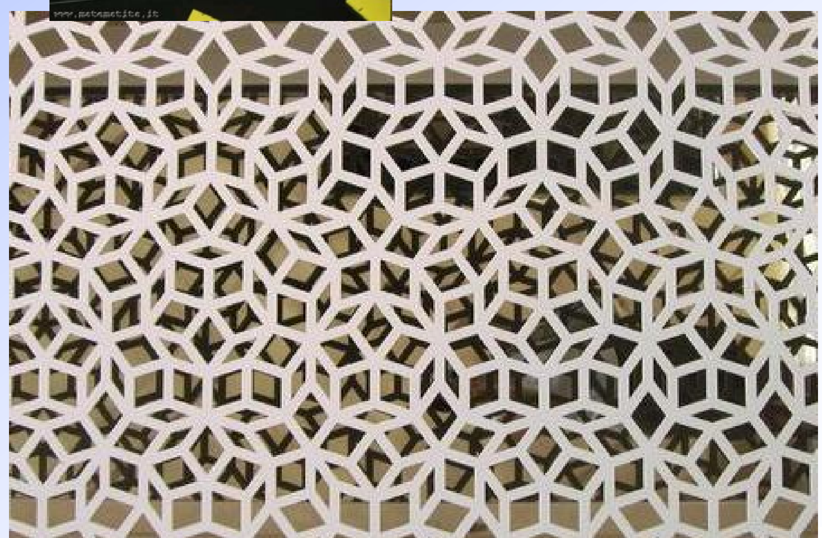

www.matematita.it


www.matematita.it




www.matematita.it


www.matematita.it

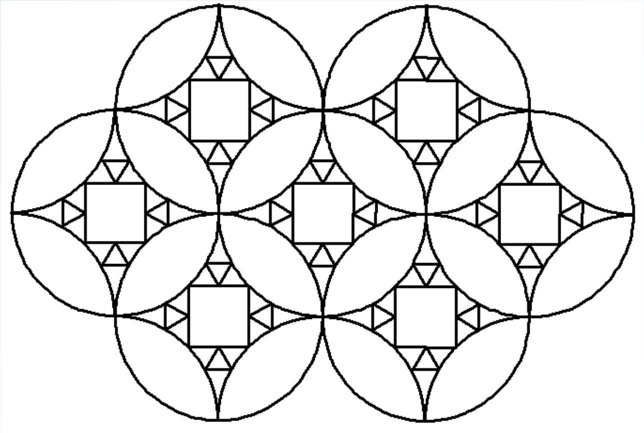


matematita

ognuna di queste immagini si presta a **generare problemi** (e problemi diversi per tutti i livelli di scuola!)

- quant'è l'area delle lunule
- quant'è la lunghezza del lato dei quadrati?
- i triangoli sono equilateri?
- …
- **come ricostruire la figura?**

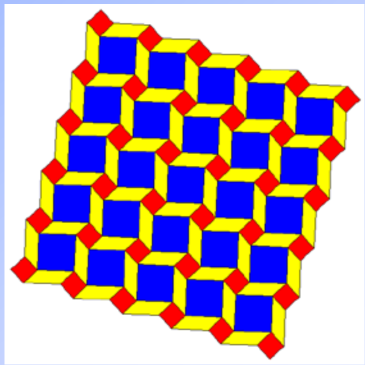
N.B. le prime domande potrebbero essere problemi di geometria "standard".
Ma l'ultima potrebbe (non è detto!) essere coinvolgente.
E l'ultima comporta poi quasi automaticamente le altre.

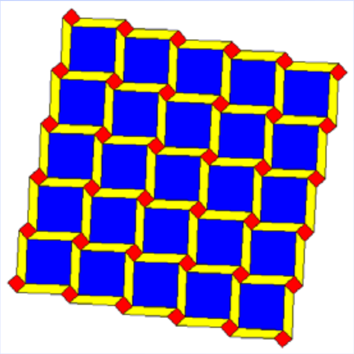


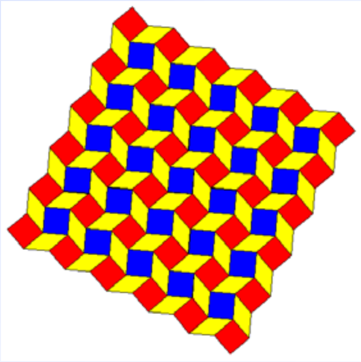
http://www.problempictures.co.uk/examples/

This tiling consists of squares and parallelograms. The large squares each have an area of 1 square meter. The angle between the large squares and small squares is 45 degrees. What is the area of one of the small squares? What is the area of one of the parallelograms?

Il problema **non è ben posto**: ma proprio per questo può essere un prezioso spunto didattico!







matematita

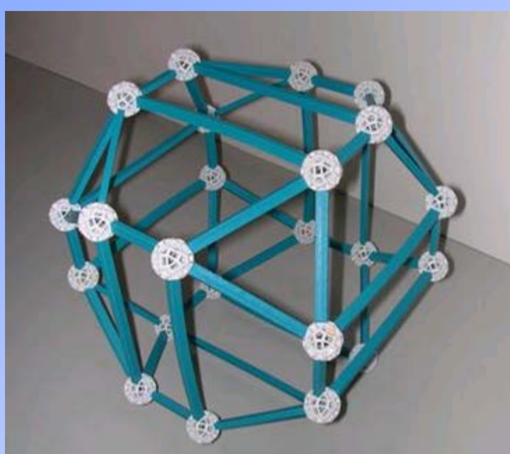
Il problema del problema
Un esempio: la simmetria

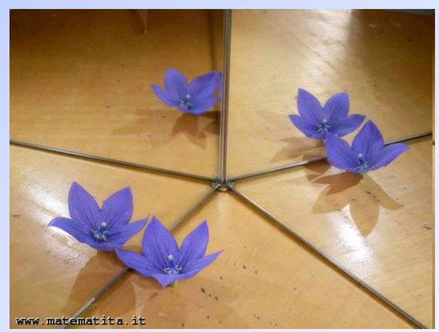
Occorre osservare le **rotture di simmetria** (per capire la simmetria). E nella “realtà” è più facile incontrare le rotture di simmetria…

matematita

MCD(4,16)=4

MCD(9,16)=1



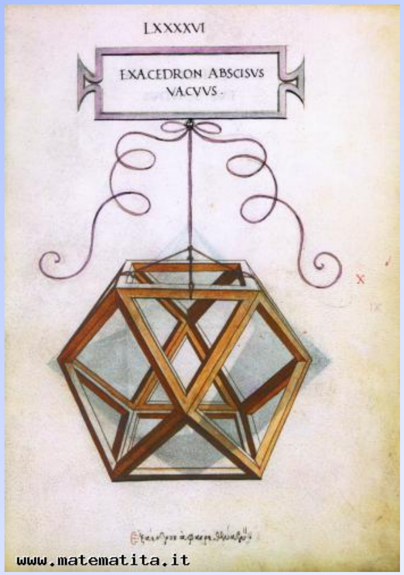


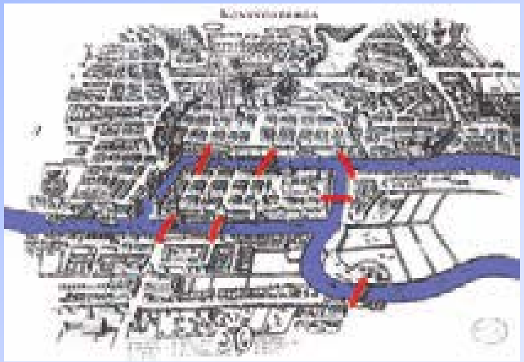
La simmetria (e la rottura di simmetria) sono concetti estremamente “naturali”

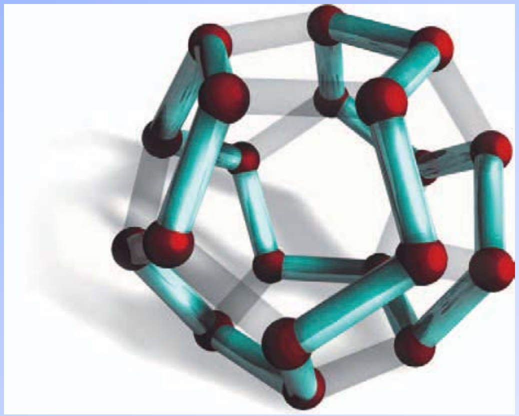
matematita

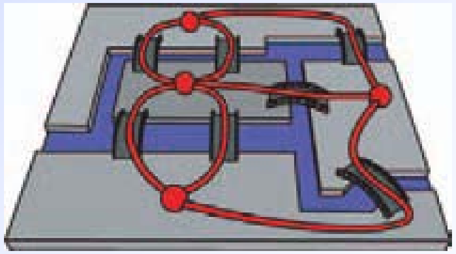
Il problema del problema.
Un esempio: i grafi

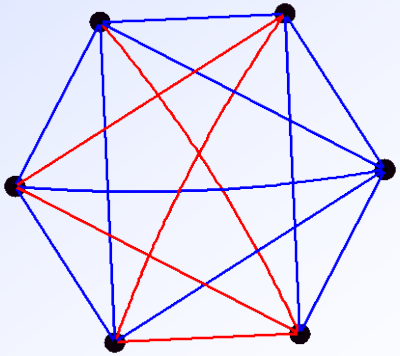
- problemi classici (Konigsberg)
- problemi difficili (circuiti hamiltoniani)
- trovare un modello adatto a un problema
- …











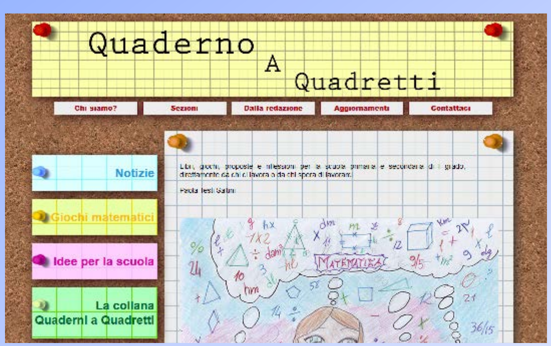
Alcuni siti del Centro *matematita* che possono essere di supporto all'insegnamento

Immagini per la matematica

www.matematita.it/materiale/

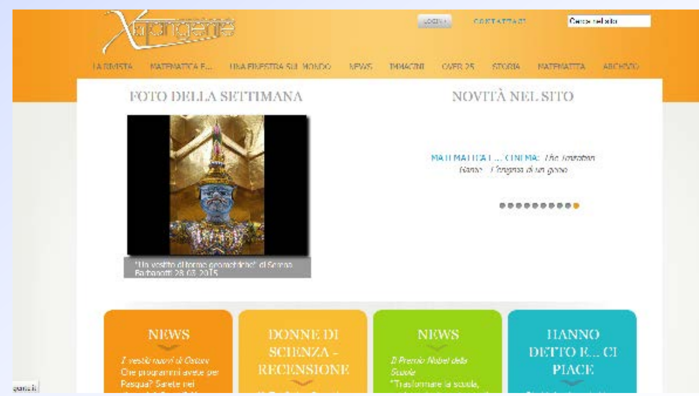
Simmetria, giochi di specchi

http://specchi.mat.unimi.it/



Quaderno a Quadretti

http://www.quadernoaquadretti.it/



XlaTangente

http://www.xlatangente.it/

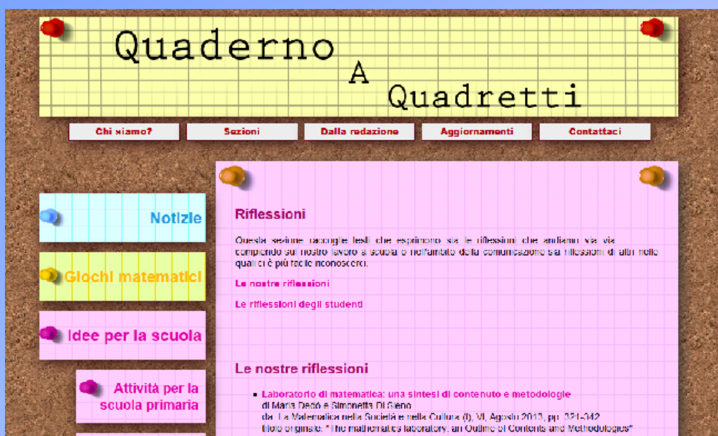
In particolare (qualche spunto per approfondire):

Sui laboratori:

http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/md_sds_2014.pdf

http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/bolondi.PDF

http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/spirito_08.pdf



Sul rigore:

http://www.xlatangente.it/upload/files/Over%2025/Riflessioni/rigore_it_sito_35.pdf

Sull'errore: *http://www.xlatangente.it/upload/files/errore_it_sito_36.pdf*

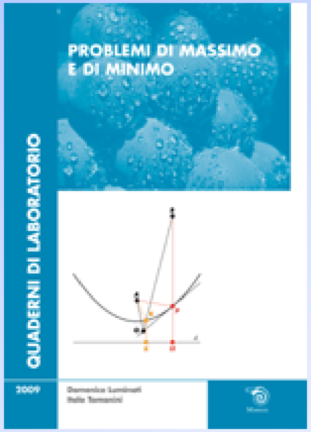
Qualche esempio di temi trattati in modalità laboratoriale

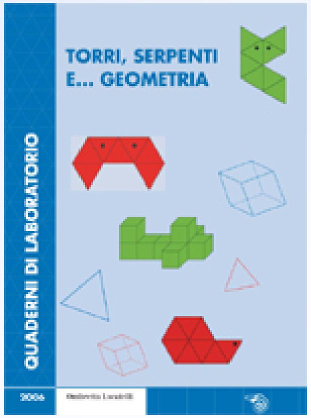
Sul sito della mostra ***Simmetria, giochi di specchi*** si trova e si può scaricare il materiale dei kit del Centro disponibili per il prestito

http://specchi.mat.unimi.it/matematica/index.html

Sul sito ***Quaderno a quadretti*** si trovano i dati della collana, in particolare i Quaderni di laboratorio:

http://www.quadernoaquadretti.it/quaderno/pubblicati.php





matematita

Grazie dell'attenzione!

matematita

info@deascuola.it | *www.deascuola.it*

Materiali disponibili su:

matematica2015.deascuola.it