rete galileo – gruppo di sperimentazione

Non solo far di conto

percorsi integrati di matematica e scienze nella scuola di base

Benevento 2010

Questo volume è stato prodotto grazie al finanziamento PON

Progetto B1-FSE-2009-926

Contributi di
Brunella Brillante, Stefano Califano, Orsola Ciarlo, Ester Cocchiarella, Giulio De Cunto, Mariateresa De Pietro, Filomena Di Biase, Angelina Di Santo, Rosa Ferrara, Angela Follo, Michelino Frattolillo, Antonietta Guerra, Rossana Guerra, Paolo Guidoni, Donatella Iannece, Anna Maio, Gina Marino, Ciro Minichini, Carmela Pagnozzi, Antonietta Palma, Patrizia Parlapiano, Maria Maddalena Pascarella, Concetta Maria Torrillo, Roberto Tortora, Maria Giuseppa Vallarelli, Michelina Venditto, Roberta Virgilio.

Indice

Presentazione

Giulio De Cunto
Dirigente Scolastico del 5° Circolo di Benevento

Durante uno dei miei primi anni d'insegnamento, all'inizio degli anni '80, mi sono trovato a lavorare presso la scuola media di Morcone, in provincia di Benevento, nello "studio sussidiario" pomeridiano, apripista del Tempo Prolungato che sarebbe arrivato di lì a poco. Un pomeriggio seguivo un gruppo di ragazzi della seconda, ed in particolare Franco D'A., che aveva frequentato per tre anni la prima ed ora si accingeva a ripetere il suo insuccesso in seconda. Franco era alle prese con una semplice espressione con le frazioni, in cui non si orientava minimamente; al suo ennesimo errore su una somma di frazioni mi scappò di dirgli: "ma che diamine, non sai fare queste cose?"; Franco mi guardò con un'espressione da cane bastonato e, nel suo dolce dialetto morconese, mi rispose: "ma sei io avessi saputo fare queste cose, stavo ancora qua?". Franco non ha mai imparato a risolvere un'espressione; anche per questo non fu ammesso alla classe successiva per l'ennesima volta, ed abbandonò la scuola. A me è rimasto, oltre alla vergogna perpetua per l'uscita infelice, un rovello: perché Franco non riusciva a raccapezzarsi in una semplice espressione, mentre a casa sua lavorava i campi con il trattore, compiendo azioni concatenate tra di loro, con un grado di complessità logica maggiore di quello presente in una espressione con le frazioni? *Perché la scuola chiede ai ragazzi quello che non sanno e non chiede loro di parlare di quello che sanno fare?*

Negli anni seguenti, come docente, sono quindi partito dai ragazzi che avevo di fronte per cercare di aiutarli a capire (?) come funzionano le cose del mondo, anche grazie al fatto che le scienze sono naturalmente la discipline dei "perché", ed ai "perché" nessun ragazzo si sottrae.

A metà degli anni '90 ho avuto la fortuna, grazie alla partecipazione ad un corso di formazione organizzato dall'allora IRRSAE della Campania, di venire in contatto con il Nucleo di Ricerca Didattica di matematica della "Federico II" di Napoli, che per la scuola media era coordinato dal prof. Roberto Tortora, che avevo conosciuto in un seminario quando ero studente; ho partecipato per alcuni anni, quindi, ai lavori del Nucleo, avendo così la possibilità di crescere sia professionalmente che personalmente, grazie al confronto con splendide persone, docenti universitari e insegnanti d scuola media, tutti impegnati a capire come migliorare il proprio lavoro. La fatica di arrivare a Napoli dopo la scuola, qualche volta senza nemmeno avere il tempo di mangiare, era abbondantemente ricompensata dal piacere della compagnia. L'impegno di riflessione sulle basi teoriche della disciplina, il confronto con i colleghi e con altre realtà educative, la frequentazione attiva di convegni e seminari mi ha sicuramente consentito di diventare un insegnante migliore; è a partire da questa convinzione che, una volta diventato Dirigente Scolastico, mi sono posto il problema di come offrire ad altri docenti l'opportunità di trovare un sostegno alla propria crescita professionale, poiché la qualità del sistema educativo, al di là degli slogan e delle mode, si basa sulla qualità del lavoro quotidiano di aula dei docenti.

Grazie alle risorse messe a disposizione dal Piano Operativo Nazionale (e grazie alla presenza nella scuola di ottime insegnanti), presso il 5° Circolo Didattico di Benevento, per tre anni consecutivi, si sono potuti incontrare docenti di varie scuole della provincia di Benevento, per confrontarsi su strategie didattiche nell'insegnamento delle discipline scientifiche. Nel settembre 2008 è stata formalizzato con un accordo la rete "Galileo" tra 17 Istituzioni Scolastiche della provincia di Benevento, a sostegno dell'attività di ricerca didattica.

L'attività svolta ha potuto contare sull'apporto "amorevole" di esperti di eccezione: Paolo Guidoni, Roberto Tortora, Donatella Iannece, Ciro Minichini.

Nel corso di tre anni scolastici si sono tenuti incontri per oltre 300 ore di formazione in presenza; sono stati coinvolti, a vario titolo e con varia intensità, circa 70 docenti della scuola di base (dall'infanzia alla secondaria di 1°); non si contano, ovviamente, le ore dedicate in classe a provare nuove strategie didattiche o le e-mail scambiate dalle persone coinvolte nella sperimentazione. Alcuni dei lavori prodotti sono stati anche già pubblicati. A maggio del 2010, in tutte le scuole dei docenti coinvolti nella ricerca c'è stata una "giornata aperta" in cui i bambini e ragazzi hanno presentato alle loro famiglie i lavori più significativi.

Il lavoro che presentiamo in questa pubblicazione riporta solo una parte del percorso compiuto insieme dai docenti nell'ultimo anno. L'illustrazione delle motivazioni e delle strategie didattiche sarà presentato in un'altra parte di questa pubblicazione.

A me preme sottolineare che dalla esperienza di lavoro effettuata si possono trarre alcuni spunti di riflessione sull'organizzazione di percorsi di formazione continua, per coltivare ed incentivare la figura dell'insegnante-ricercatore, un insegnante che sappia sperimentare insieme con i propri alunni nuovi percorsi didattici, riflettendo sulle basi epistemologiche delle discipline d'insegnamento e sulle difficoltà reali del "fare scuola" oggi.

Le proposte che seguono sono state avanzate, a nome della rete "Galileo", all'Assessorato alla Pubblica Istruzione della Regione Campania, perché le facesse sue (le Regioni hanno competenze proprie nel campo dell'istruzione…):

- Sostenere percorsi di formazione a distanza, autonomamente determinati da scuole o da reti di scuole; assicurare le risorse per completare i percorsi di formazione iniziati in presenza con il sostegno a distanza da parte di tutor di ricerca; (si potrebbe utilizzare sia una piattaforma della Regione Campania sia le piattaforme delle singole scuole o reti);

- Assicurare risorse aggiuntive nell'organico di Istituto per le scuole o reti di scuole che attuino sperimentazioni didattiche, così da consentire ai docenti coinvolti in sperimentazioni di avere un alleggerimento del carico orario di lezione; non si propone di "tirar fuori" dalle classi i docenti impegnati in progetti di ricerca, ma consentire loro di avere momenti da dedicare alla riflessione e all'approfondimento teorico;
- Creare una collana editoriale per la pubblicazione dei lavori di ricerca didattica più significativi prodotti in regione; la pubblicazione potrebbe avvenire sia on-line, sia a stampa, per una capillare diffusione delle migliori pratiche didattiche a tutte le scuole della Campania;
- Rimborsare le spese sostenute da docenti che fanno parte di un gruppo di ricerca per la partecipazione a convegni o seminari a carattere residenziale, sia che si svolgano in Campania sia che si svolgano fuori regione.

L'attuazione degli interventi predetti potrebbe essere gestita direttamente dalla Regione senza trasferimenti di risorse alle singole scuole; per la determinazione delle attività da incentivare la Regione Campania potrebbe avvalersi di un comitato scientifico, che selezioni le attività sulla base di criteri decisi e pubblicati contestualmente all'emanazione del bando relativo all'iniziativa.

Sono piccole cose, ma potrebbero dare un segnale di attenzione per quanti non hanno perso la voglia di impegnarsi a migliorare la qualità del proprio lavoro di insegnante.

Introduzione – Cambiare si può: per esempio

A cura dei coordinatori dei gruppi di lavoro

<La scuola è di tutti>: è il titolo di un libro uscito recentemente.
<Quindi tutti dovrebbero (pre)occuparsene>: sembrerebbe una ragionevole conseguenza.
In poche pagine vorremmo, tutti insieme, proporre quale è stato per un paio di anni il nostro modo di (pre)occuparcene: sperando così di invogliare qualcun altro ad avviarsi su strade di questo tipo.

Nelle pagine che seguono sono così presentati aspetti "esemplari" delle attività innovative in area scientifico-matematica avviate negli anni scorsi in alcune Scuole di base (infanzia, primaria, secondaria di I grado) della provincia di Benevento. Le attività si sono via via articolate sulla base di una struttura di collaborazione fra Circoli diversi: sostenuta, in forma di rete, da fondi del PON, ed organizzata secondo modalità originali brevemente descritte nel prossimo capitolo I.
Le attività sono cresciute, attraverso inevitabili difficoltà e progressive soddisfazioni, attorno agli incontri periodici di un "nucleo di progetto": il Dirigente responsabile dell'organizzazione, qualche Insegnante in rappresentanza di ciascuna delle numerose scuole coinvolte, quattro Universitari (due matematici e due fisici) impegnati da molti anni nella ricerca di modalità di insegnamento più efficaci e efficienti a livello di scuola di base. Come punto di partenza sono state così assunte le acquisizioni della ricerca sul campo: cioè che, detto in forma di slogan-obiettivo-risultato, a scuola <*capire si può*> (dalla parte dei ragazzi) e <*insegnare si può*> (dalla parte degli adulti), "bene" e con reciproca motivazione e soddisfazione di "tutti". D'altra parte, nel confrontarsi con le condizioni reali delle scuole reali, ci si è posto come obiettivo del lavoro in comune quello di esplorare le possibilità dei cambiamenti concreti, graduali ma significativi, che appaiono oggi necessari per avvicinare il fare-scuola alle potenzialità e alle necessità culturali ed emotive di chi (ragazzi e adulti) vi è coinvolto per un così lungo tempo-di-vita.
Gli incontri sono dunque partititi dalla proposta-discussione di "nuovi" modi di guardare ad alcuni argomenti disciplinari comunemente visti come aridi-e-difficili, anche con il coinvolgimento diretto degli adulti in esperienze ben studiate sul piano della risposta dei ragazzi; e sono proseguiti attraverso la proposta-discussione di brevi percorsi didattici in cui la progressiva comprensione sia sostenuta da un quadro concettuale

adulto esplicito e coerente, e dalla motivazione associata a modalità di lavoro in classe capaci di coinvolgere esperienze e curiosità dei ragazzi. Nel discutere insieme problemi e risultati legati all'inserimento di "nuovi" elementi in un "normale" corso di lavoro scolastico ci si è infine concentrati su quello che succede quando a un certo punto si arriva a "provarci" veramente: con un'ipotesi finale, emersa dopo anni di lavoro concreto, forse di nuovo riassunta nello slogan-obiettivo-risultato che <*cambiare si può*>. *Purché …*

Immediatamente evocata da ogni proposta-sollecitazione a cambiare qualcosa nel fare-scuola emerge sempre la domanda: ma è proprio necessario cambiare? ma perché? ma che cosa?

Subito, quindi, una precisazione: il senso in cui qui si parla di cambiamenti necessari e possibili nel fare-scuola non ha (quasi) nulla a che vedere con le <riforme epocali> di cui la scuola italiana è stata recentemente oggetto (pressoché inerte). Non si è trattato nel lavoro fatto insieme, non si tratta qui, di problemi organizzativi o amministrativi o di gestione del personale; né (esplicitamente) di problemi di architettura curricolare o di verifica delle competenze. Benché sia ovvio che tutti questi aspetti incidono comunque, e molto pesantemente, sul fare-scuola effettivo e sulle sue possibilità di efficacia e efficienza; e che quindi occorre tenerne conto in qualunque progetto concreto di intervento.

Il problema affrontato è stato piuttosto quello del senso e del significato di quello che a scuola succede in relazione agli attori umani che vi sono coinvolti: i ragazzi in primo luogo, nella loro relazione con gli *strumenti culturali* comuni di cui dovrebbero "appropriarsi" per utilizzarli nel costruire le loro personali storie di vita; e gli insegnanti, nella loro professionalità non di passivi trasmettitori-verificatori di competenze comportamentali, ma di creativi mediatori verso *modi di vedere e di agire, modi di pensare e parlare, … modi di vivere* che attraverso il tempo la cultura ha validato come essenziali alla convivenza civile.

Dunque, come "funziona culturalmente" la nostra scuola di base, oggi, in particolare in area di scienze e matematica? Decisamente male, in media – a parte le numerosissime, felici "isole" di professionalità individuale e di gruppo. Da un lato i rilevamenti internazionali a campione (campioni di individui, campioni di domande) "certificano", pur nella loro problematicità, livelli di prestazione media a 15 anni in buona sostanza disastrosi: sia in assoluto, sia in relazione alla trentina di Paesi "sviluppati" che ci precedono. D'altro lato abbiamo esperienza diretta e

diffusa di alcuni dati di fatto (fra loro correlati), in particolare relativi alle aule e alle ore di matematica e scienze: che in media a scuola <si sta male>, alunni e insegnanti; che in media la scuola <non fa bene>, cioè non assolve il suo compito costituzionale di recupero delle differenze culturali di ingresso e di costruzione di strumenti culturali affidabili per tutti; che anzi spesso la scuola in modo diretto <fa male>, perché invece di valorizzare le potenzialità connesse alle *diversità* iniziali dei ragazzi le trasforma profondamente producendone *differenze,* cognitive e motivazionali, che quasi sempre marchiano i successivi sviluppi di vita. Mentre basta dare un'occhiata alla grettezza culturale e didattica della quasi totalità dei libri di testo "liberamente adottati" dagli insegnanti per avere una conferma della quasi ineluttabilità del disastro epocale in cui siamo immersi.
Ma con che criterio possiamo allora continuare ad affermare che <capire si potrebbe>, che <insegnare si potrebbe>, che (forse) <cambiare si potrebbe> … sempre <purché …>?

Il <primo motivo principale> per cui qualcuno non capisce le "cose" (non è motivato allo sforzo necessario a capire) è che le cose stesse non gli sono spiegate (motivate) in modo adeguato. Vale per i ragazzi nei confronti dei loro insegnanti, vale per gli insegnanti nei confronti dei loro formatori … e così via; mentre in sostituzione dello spiegare e del capire si installa rapidamente, a tutti i livelli, la micidiale routine del far-finta-di: di spiegare, di capire, di "certificare" il capire, e così via. Alla loro radice, *spiegare e capire* sono d'altra parte legati da una condizione di reciproca *risonanza,* appoggiata al contesto insieme concreto-e-culturale (di azioni e discorsi, di fatti e possibilità … e così via) al cui interno avviene questo tipo di interazione così esclusivamente *umana*. (E come si può imparare ad accorgersi se "ci si capisce" o no, si può bene imparare ad accorgersi se "ci si spiega" o no).
Ma perché si arrivi alla risonanza è necessario che sia chi deve (cerca di) spiegare, sia chi deve (cerca di) capire in qualche modo si "espongano" ciascuno all'altro, mettendo in gioco le "versioni" personali delle strutture di conoscenza e motivazione che lo spiegare/capire stesso di per sé coinvolge. In una parola, è necessario che chi (forse) spiega e chi (forse) capisce *si fidino*: sia uno dell'altro; sia del contesto in cui avviene l'interazione; sia - soprattutto - della possibilità stessa che attraverso l'inter-mediazione culturale qualche aspetto dei fatti o del modo di vederli possa essere alla fine controllato meglio. (Spesso si passano anni "esercitandosi" a "risolvere problemi": ma se attraverso tanto tempo e

tanta fatica si può arrivare a qualche tipo di *condizionamento* efficace, la strada del *vero capire* può restarne ostruita – troppo spesso bloccata, per sempre. E d'altra parte solo una vera e profonda esperienza di cosa vuol dire capire attraverso la mediazione di un altro può avviare a quel "capire da sé" appoggiandosi alla cultura che dovrebbe costituire l'obiettivo e l'esito di tutta l'impresa del fare-scuola).

<I padri hanno mangiato i frutti acerbi, e le bocche dei figli si sono allappate>. Sembra, quella biblica, una ben strana forma di causalità: ma dà una buona immagine del paradosso che troppo spesso inchioda in qualche modo le possibilità di crescita cognitiva dei nostri figli alle impossibilità di crescita a suo tempo sperimentate da noi che oggi li dovremmo aiutare a crescere. Si potrà mai rompere questo circolo vizioso?
Di fatto le difficoltà di interazione sperimentate in qualunque dinamica innovativa di "formazione" o "aggiornamento" di adulti, che sia attenta alla sua efficacia, rinviano spesso a un atteggiamento radicalmente aprioristico: <questi argomenti sono all'interno di un discorso che a suo tempo ho dovuto riconoscere come di per sé astrattamente arido, in sostanza incomprensibile, comunque privo di qualunque connessione con la mia esperienza di vita; quindi a maggior ragione li vedo come inutilizzabili per una prima formazione cognitiva, in quanto privi di qualunque plausibile "presa" sulla comprensione e l'interesse dei ragazzi fino a una certa età; quindi è una sostanziale perdita di tempi ed energie cercare di introdurli nell'ambito della scuola di base; …>. E contro questi apriori a quasi nulla vale opporre le evidenze della ricerca che testimoniano della necessità di *nuovi approcci precoci* ai principali nodi della trasmissione culturale.
Come si può superare il blocco? In modi, ormai sperimentati in situazioni diverse, che hanno una struttura sostanzialmente simile all'interno di una estrema flessibilità di aggiustamento alla specificità delle situazioni stesse. Proviamo a schematizzare alcuni degli *ingredienti* comunque coinvolti nell'ottenere una *risonanza fra spiegare e capire, all'interno di ogni dinamica di comprensione e apprendimento*:
i) Una *ristrutturazione degli approcci disciplinari* definita dal carattere di *percorso cognitivo* (percorso attraverso il tempo e i paesaggi) che condiziona ogni acquisizione e/o cambiamento dei modi di pensare (dei ragazzi come degli adulti): questo in alternativa alla diretta presentazione di *regole finali* dettate dalla sistematizzazione disciplinare. (Un manuale sistematico è ovviamente efficiente: ad uso però di chi abbia già capito e già imparato).

Tanto per intendersi: non è sensato (non è efficace né efficiente) spiegare, ad alcun livello, i fatti del mondo correlati al fare-forza partendo direttamente dalle "leggi di Newton"; e così via.
ii) Un sistematico *aggancio* sia *all'esperienza-linguaggio-pensiero che è "comune"* alle persone coinvolte (ovviamente diversa secondo i contesti); sia alla possibilità di "tradurre" ("trasferire", "trasdurre", …) ogni avanzamento di conoscenza in termini condivisi ed espliciti di esperienza concreta, di linguaggio-rappresentazione, di strategie di pensiero coinvolte (in analogia e/o contrasto rispetto ad altre). Tanto per intendersi: non è sensato (non è efficace né efficiente) escludere o "saltare" l'esperienza corporea (diciamo percettivo-motoria), in nessun argomento di scienze o matematica e a nessun livello; e così via
iii) Una sistematica, esplicita *esperienza di riorganizzazione cognitiva* dei (propri e altrui) modi di pensare-agire-parlare-interpretare-progettare …: esperienza che condiziona, dalla parte di chi deve imparare, la possibilità di <imparare a imparare>; e dalla parte di chi deve insegnare la possibilità di <imparare a insegnare>. Tanto per intendersi: le così(mal)dette "competenze" si possono riassumere nella *possibilità di pensare, contemporaneamente flessibilmente e reversibilmente, in modi diversi – eventualmente adatti a situazioni diverse*: cosa di fatto impossibile a chi sia allevato (o allevi altri) nella convinzione che i modi di pensare siano, comunque e univocamente, giusti o sbagliati; oppure scorrelati fra loro, come oggetti diversi in una ipotetica cassettiera.
iv) Una sistematica, esplicita *esperienza di spiegare quello che si pensa* su qualcosa, e come lo si pensa, a qualcun altro (incluse le cosiddette "lezioni frontali", le cosiddette "risposte alle interrogazioni", le cosiddette "interazioni fra pari" – adulti o ragazzi; e così via).

(Solo una domanda: come si confrontano queste ipotesi di strategia di insegnamento efficace e efficiente con quello che di fatto accade normalmente nelle "nostre" classi, o che di fatto è proposto dalla maggioranza dei "nostri" libri di testo?)

Resta il nodo cruciale. <Certo che sarebbe bello un fare-scuola fatto così: ma da un lato sarebbe molto difficile, con i mezzi a disposizione; da un altro, gli alunni non sarebbero probabilmente in grado di seguirlo; e comunque ci vorrebbe troppo tempo, in relazione sia alle ore di scuola che ai programmi da svolgere>.
Obiezione accolta. Non si può cambiare tutto in una volta (<natura non facit saltus> dicevano gli antichi).

Obiezione respinta. Si può cambiare, molto gradualmente ma con sicurezza: sia nel tempo ("in verticale", si usa dire, in relazione alla crescita dei ragazzi) sia negli argomenti ("trasversalmente", si usa dire, in relazione ai profondi intrecci fra discipline). E si può proprio perché ci si può convincere, gradualmente e in base all'esperienza diretta, che *ci si può fidare* di suggerimenti che siano stati verificati validi in situazioni diverse, e che siano abbastanza flessibili da potersi aggiustare a situazioni nuove. Ci si può fidare, nel momento stesso in cui si chiede fiducia – e così si può acquistare credibilità. Ci si può fidare del fatto che bambini e ragazzi vanno facilmente in *risonanza*, per comprensione e motivazione, con i percorsi di apprendimento che per loro (come per noi adulti) sono dotati di *significato*: percorsi cioè che attraverso il coinvolgimento diretto partono dall'esperienza di vita e la riorganizzano e sviluppano, permettendone un controllo sempre maggiore e raccordandola con continuità anche alle competenze culturalmente più sofisticate. Ci si può fidare del fatto che un investimento più lento e approfondito nella comprensione e motivazione iniziale può essere largamente recuperato nel tempo e valorizzato negli sviluppi successivi (soprattutto in quelli oltre la scuola dell'obbligo, se si sa interagire bene fra colleghi). Ci si può fidare del fatto, infine, che una nuova comprensione adulta sia di quello che si "deve" spiegare e insegnare, sia di come "funzionano" le persone che devono capire e imparare, porta ad un salto di motivazione e soddisfazione (quindi a un salto di qualità) nella professionalità docente.
(Alla fine di questo lavoro-insieme vorremmo solo suggerire, a bassa voce: provare per credere).

Ovviamente "poi" restano tutti gli altri problemi: le relazioni con i colleghi, i genitori, i dirigenti …; le relazioni con i vincoli al contorno, dagli orari ai libri di testo, dalle attrezzature alle prove INVALSI …; i rapporti problematici con le "novità del mondo", fuori e dentro la scuola …; e così via. Però diventa possibile affrontare le difficoltà delle relazioni, le assurdità dei vincoli, lo sconcerto delle novità … in modo diverso: insieme, innanzitutto; e comunque con una riacquistata *consapevolezza del valore* insostituibile del proprio lavoro didattico che sola può "fare la differenza". Mentre resta comunque vero che (come sempre, a tutti i livelli) per cominciare, per cambiare, per cominciare a cambiare <all'inizio bisogna un po' buttarsi>. E che niente che riguarda lo spiegare e il capire può essere mai offerto-accettato come predefinito e garantito (automatizzato, diciamo), in grande o in piccolo: per fortuna la prima trasmissione culturale (come la stessa trasmissione della vita) si basa ancora sulle creatività e sulle responsabilità che sono caratteristiche dell'interazione fra individui umani.

Così abbiamo pensato che per dare visibilità/discutibilità a questi modi di vedere possa essere utile offrire un "assaggio" del modo in cui, per un paio d'anni, abbiamo cercato di (pre)occuparci in concreto <dell'avvenire delle nostre scuole>. Per questo abbiamo scelto quattro (sotto)contesti specifici fra quelli su cui si è lavorato, decidendo di associare a ciascuno di questi un breve "schizzo teorico" che possa dare un'idea dell'approccio disciplinare e cognitivo coinvolto, e un breve "schizzo pratico" che possa dare un'idea di come un modo di vedere le cose possa diventare un modo di aiutare bambini e ragazzi a crescere in comprensione e motivazione. Resta comunque ovvio che qualunque itinerario efficace di formazione, per gli adulti come per i ragazzi, non può affidarsi alla schematicità di queste poche pagine.

I quattro contesti "esemplari" di lavoro disciplinare cognitivo e didattico presentati nei prossimi capitoli, da I a IV, sono dunque:
"Regole per i puri numeri" - in particolare, relazioni fra gruppi di numeri consecutivi
"Regole per il fare-forza" - in particolare, relazioni fra il fare-forza corporeo e quello degli oggetti
"Regole per il galleggiamento" - in particolare, relazioni fra gli aspetti "fattuali" e formali
"Regole per le cose che si sciolgono" - in particolare, relazioni fra gli aspetti "fattuali" e formali
Nei primi due contesti si lavora su situazioni che possono apparire, ad un'analisi superficiale, quasi esclusivamente matematiche o quasi esclusivamente fenomenologiche. In realtà il profondo intreccio fra pensiero (strategia-spiegazione), esperienza (percezione-azione) e linguaggio (o rappresentazione) che si trova alla base di ogni conoscere emerge all'evidenza di una riflessione appena attenta, e coinvolge a fondo adulti e bambini.
Negli altri due contesti, invece, le situazioni di lavoro sono tali da imporre di per sé all'evidenza che <senza i numeri non si capisce, ma anche senza le cose che succedono non si capisce>: qui infatti aspetti formali e aspetti fattuali emergono insieme, profondamente intrecciati, dall'esperienza primaria di "come va" il mondo e di "come va" la nostra testa; e il lavoro di formazione culturale (adulta e in sviluppo) consiste proprio nell'insegnare/imparare a vedere tali aspetti, distinguerli,

reintrecciarli fra loro, "scoprirli" in configurazioni diverse in situazioni nuove, … <e così via all'infinito>.
(Tenere presente che sia le brevi presentazioni "teoriche" sia i brevi rendiconti di lavoro degli insegnanti sono stati scritti senza aver definito un criterio comune apriori, e comunque utilizzando anche spunti e suggerimenti emersi in situazioni diverse ada quelle a cui si fa esplicito riferimento).

Un commento a proposito della parola *regole* (e delle immagini che la parola stessa può evocare). Sul fatto che l'educazione "scientifica" (in senso lato), proprio per la sua insistenza sull'idea di "regole" (leggi e principi, dogmi e teoremi … e/o quantaltro), possa svolgere un ruolo "repressivo, inaridente, mortificante la creatività … " nella formazione del pensiero umano, si sono versati fiumi di inchiostro (e si sono prese e propagate solenni sbornie mentali).
Senza farla lunga, l'idea che guida questo tipo di lavoro con adulti e bambini può essere grosso modo schematizzata così. E' solo evidente che la nostra "libertà" di agire e pensare (parlare …) è in realtà limitata da ultrapotenti "vincoli" esterni e interni (per giunta correlati tra loro). Le *regole del fare-forza*, solo per esempio, *vincolano* i nostri modi di scendere le scale (al passo, di corsa, facendo gli scalini a due a due …) senza cadere, i nostri modi di usare un coltello (di taglio, di punta, …) senza farci male, i nostri modi di costruire un ponte (di pietre, di legno, di ferro, …) senza che crolli, … e così via. Così come *le regole dei puri numeri vincolano* i nostri modi di progettare, eseguire, interpretare azioni (interne ed esterne) utilizzando schemi di ragionamento "astratto" che a tali azioni si adattino con efficacia …. E così via. A questo punto è cruciale accorgersi che poter *controllare (riconoscere, e utilizzare per propri scopi) i vincoli* specifici imposti da un contesto, in maniera indipendente dal contesto stesso (cioè in maniera "astratta", quindi "autonoma" da eventuali condizionamenti acquisiti nel contesto stesso, quindi "trasferibile" ad altri contesti), costituisce una stupefacente conquista della *creatività* umana: sia a livello di progressiva e accidentata evoluzione culturale, sia a livello di progressiva e accidentata crescita individuale. Mentre l'altra faccia della stessa creatività coincide appunto con la capacità di *utilizzare in modo produttivo e sempre rinnovato* quelle variegate *combinazioni di vincoli* che, pur nelle loro crescenti complessità, sono la chiave stessa di una <costruzione sociale della realtà>. Entrare fin dall'inizio dello sviluppo cognitivo in questa "logica" del capire e dell'imparare in ambito "scientifico" è possibile e vitale per tutti – si può ben dire che è un

fondamentale diritto di tutti: mentre è appunto compito della Scuola renderne possibile e garantirne la realizzazione.
(Vengono in mente a questo proposito le osservazioni, fra loro complementari, di due vecchi Saggi. Di Dewey, secondo cui una scuola che non sa prendere a suo prototipo-modello la competenza-di-vita-nel-mondo che i ragazzi di ogni età portano comunque con sé, e a suo obiettivo esplicito l'accrescimento consapevole della stessa competenza, è una scuola senza significato e senza prospettiva di futuro. Di Bruner, che alla scuola di ogni livello propone, come obiettivo della mediazione educativa, per una metà del tempo la presa di coscienza di come di fatto va il mondo, per l'altra metà la capacità di usare in modo <creativo> di tale acquisizione (con la notazione che anche la creatività può/deve essere insegnata e appresa).

Un'ultima osservazione. In ambito "scientifico" in senso lato non si dovrebbe parlare altro, "fin dalla più tenera età", che di *modelli* - non si dovrebbe cioè parlare in termini di cosa/come *sono* le cose (le forze, i numeri, … i modi di pensare …) ma di cosa/come noi possiamo pensare che potrebbero essere, in modo che i nostri modi di pensare si rivelino coerenti e efficaci sia in relazione ai fatti del mondo, sia nei loro rapporti reciproci. <*E' come se …*>. Come se le parti piccole di zucchero, che pure non si vedono, fossero tutte sparse in mezzo alle parti piccole dell'acqua; come se preferissero separarsi dalle altre parti piccole di zucchero per infilarsi in mezzo a quelle dell'acqua; come se a un certo punto non trovassero più posto abbastanza negli spazi dell'acqua che c'è …; come se fossero obbligate dalle regole dei numeri (che dicono quanto zucchero e quanta acqua ci sono) a fare esattamente quello che fanno… (E chi non è in grado di restarne stupito e affascinato ha già perso per strada un bel po' della sua "creatività").
Sarebbe, questo, un discorso complesso e fondamentale sul capire umano. Ma per ora finiamo qui.

Questa che doveva essere una introduzione al racconto di qualche esempio del nostro lavoro "su" fare-scuola ne costituisce in realtà anche una specie di conclusione (provvisoria). Abbiamo infatti potuto constatare, pure attraverso tante inevitabili difficoltà, che quelli che qui sono stati presentati come criteri ispiratori dei modi di lavorare proposti sono stati in concreto confermati nella sostanza, e molto arricchiti nei particolari. A tutti i livelli. Quello che (ci) resta da fare è dunque andare avanti, sperando di trovare altri compagni di viaggio.

Capitolo I – Sommare numeri consecutivi

Lavori di M. Frattolillo, A. Guerra, C. Pagnozzi
Gruppo coordinato da R. Tortora

Introduzione

L'attività che viene qui descritta si distingue dalle altre presentate in questa rassegna in quanto è un esempio – l'unico qui riportato – di lavoro "interno" alla matematica, in particolare all'aritmetica. Si tratta di un esempio molto significativo per varie ragioni. Infatti, come sarà illustrato meglio nel seguito:

1. Mostra come l'attività esplorativa possa essere condotta più o meno con le stesse modalità e sicuramente con lo stesso atteggiamento sia dentro che fuori la matematica.
2. È un'attività aperta che si presta ad essere svolta e sviluppata in molte direzioni e con molti diversi gradi di approfondimento.
3. Contiene interessanti risvolti di carattere linguistico.
4. Si presta per un precoce avvio all'algebra.
5. Serve a rinforzare conoscenze e abilità matematiche già possedute, trasformandole in competenze, nella misura in cui vengono applicate ad una situazione in cui risultano utili.
6. Consente di trattare numerosi argomenti del programma di vari livelli scolastici e di far crescere abilità linguistiche, argomentative, di rappresentazione, di calcolo.
7. In particolare consente di attivare la sequenza "esplorazione, selezione dei dati osservati, congettura, verifica, dimostrazione", ripetutamente e con i gradi di approfondimento che la situazione consente.
8. Permette di alternare modalità di lavoro individuale, di piccolo gruppo e di grande gruppo. E di sviluppare le capacità di comunicazione attraverso il confronto.

La consegna su cui è incentrata l'attività e da cui *tipicamente* può prendere avvio è:

Prendi tre numeri consecutivi, sommali e ripeti quest'operazione con altre terne di numeri consecutivi. Che cosa osservi?

A partire da questa prima domanda, altre possono seguire, sia seguendo un copione già previsto dall'insegnante, sia assecondando gli sviluppi che

caso per caso si verificano nelle classi, e naturalmente tenendo conto dell'età degli studenti. È anche possibile partire in modo diverso e inserire la precedente consegna in un percorso che nasce da altre questioni.
Nel seguito si vedranno appunto alcuni esempi di percorsi, in cui si manifestano alcune di queste possibili variazioni. In particolare vengono presentati, nei paragrafi che seguono:

1) un primo esempio, ricco di descrizioni e commenti, di un lavoro svolto in una seconda elementare;
2) un secondo esempio, relativo ad una classe III di una scuola media, anche questo corredato da numerosi commenti;
3) un terzo resoconto, anche questo relativo ad una classe di scuola media;
4) infine un'analisi, sul piano teorico, di altri possibili sviluppi, e una breve conclusione.

La parte 4), come anche la presente breve introduzione, è a cura dell'esperto universitario. Le parti 1), 2) e 3) sono invece state scritte dagli insegnanti che hanno condotto le esperienze. Queste esperienze hanno avuto origine da una proposta di lavoro formulata dall'esperto, ma poi sono andate avanti affidate all'iniziativa degli insegnanti, non essendoci stata la possibilità di seguire passo passo ogni singola esperienza in una condivisione fra insegnanti e con l'esperto. Ma questa circostanza costituisce anche una oggettiva ricchezza di questo testo, perché consente di mettere a confronto a posteriori situazioni e scelte didattiche anche sensibilmente diverse.
Nell'organizzare questo materiale scritto, si è scelto di dare voce direttamente ai tre insegnanti protagonisti del lavoro di classe, nella convinzione che le loro voci possano giungere in modo più diretto ed efficace ad un eventuale pubblico di colleghi interessati. Va però detto che, nel corso del lavoro preparatorio per la stesura di questo capitolo, il paragrafo 1 è stato lungamente discusso prima di ricevere la sua forma definitiva, parzialmente ciò è accaduto per il paragrafo 2, mentre il paragrafo 3 è riportato così come pervenuto da parte dell'insegnante.
I tre resoconti sono poi corredati di note scritte dall'esperto, in cui si sottolineano aspetti delle situazioni di classe e della conduzione didattica viste a posteriori con occhi esterni. È bene precisare che tali commenti non vogliono in nessun modo configurarsi come critiche all'operato degli insegnanti, ma come ulteriori spunti di riflessione che diano per quanto possibile a questo testo l'aspetto di un dibattito a più voci come nella

realtà spesso è stato, piuttosto che l'espressione di un singolo punto di vista.

1. Prima esperienza. Classe 2ª D, Scuola primaria.

Istituto Comprensivo di Ceppaloni, plesso di Pannarano.
Insegnante: Carmela Pagnozzi
Prima lezione
(Sia questa che le successive lezioni sono per lo più di tre ore ciascuna).
I bambini sono 19 e vengono divisi in 5 gruppi. Per la costituzione dei gruppi si è seguito il criterio di formare gruppi misti, facendo sì che all'interno di ciascun gruppo ci fossero studenti dei quattro livelli di apprendimento di cui è composta la classe.
Assegno agli alunni il compito di prendere vari gruppi di 3 numeri consecutivi e di calcolare la loro somma.
Dopo una serie di somme di numeri consecutivi, ho chiesto loro di osservare quale relazione ci poteva essere tra i risultati ottenuti.
E' opportuno notare che le osservazioni che si possono fare sono tante. In particolare ci si può concentrare sul legame fra tre specifici numeri consecutivi e la loro somma (chiamiamo per comodità questo lavoro "verticale") oppure sul legame tra le somme di diverse terne di numeri consecutivi (chiamiamo questo lavoro "orizzontale"). Dunque nella mia richiesta ai bambini vi è un primo **condizionamento**: gli alunni sono stati pilotati da me ad osservare le relazioni tra i risultati e quindi ad un lavoro orizzontale.[1]
Girando per i gruppi ho notato che: tutti hanno disposto i numeri secondo la sequenza ordinata naturale 1-2-3-4-5-6-7-8-9…, ed hanno quindi esaminato le varie terne che si formano raggruppando questi numeri a tre a tre: 1-2-3; 4-5-6; 7-8-9; ecc.. Mi chiedo se questo modo di operare è venuto spontaneo, o se si sono condizionati tra loro. In seguito

[1] Tutto questo resoconto è corredato di numerose osservazioni che la maestra effettua sulla propria conduzione dell'attività. In effetti ciascun insegnante nella sua attività di classe compie continuamente un gran numero di scelte spesso dettate dall'esperienza o dall'abitudine, scelte che indirizzano gli alunni in una direzione o in un'altra. Ora, mentre di solito è abbastanza facile essere attenti ai comportamenti degli alunni, è invece meno facile rendersi conto dei comportamenti propri. Anzi molte delle scelte grandi e piccole di un insegnante spesso non sono assunte in modo consapevole. Però la consapevolezza delle proprie convinzioni e delle modalità di conduzione didattica si può affinare, anzi questo dovrebbe essere uno degli obiettivi di ogni corso di aggiornamento per insegnanti. Infatti più si procede in questa capacità di riflessione, più ci si rende conto di come essa è preziosa per la progettazione dell'attività didattica futura e in ultima analisi per migliorare i propri risultati.

glielʼho chiesto e ho capito che a ciò sono stati indotti dagli esempi che ho fornito allʼinizio.
I numeri presi in considerazione nei vari gruppi di bambini sono stati molti. In particolare nella sequenza di tutti i numeri raccolti a tre a tre sono arrivati a superare 100 e qualcuno è arrivato quasi a 200.
Per calcolare le somme sono state adottate varie procedure. In primo luogo i bambini sono stati invitati a eseguire le somme usando il calcolo mentale. Il lavoro è servito allora in questa fase per esercitare e rafforzare le capacità in questo senso, perché le somme da eseguire erano molte e con numeri abbastanza grandi. Difatti alcuni hanno fatto ricorso spontaneamente allʼalgoritmo della somma quando il calcolo mentale gli creava troppe difficoltà; e ciò mi ha dato la possibilità di osservare quando accade che il calcolo mentale viene sostituito da quello procedurale. Successivamente i bambini abbandoneranno questa procedura approfittando delle regolarità che saranno scoperte, passando così ad adottare una procedura di addizione ripetuta e poi moltiplicativa. La sequenza addizione/addizione ripetuta/moltiplicazione è a me apparsa in questo caso come unʼevoluzione spontanea, invece che essere una semplice costruzione astratta proposta sui libri.[2]
Dopo aver calcolato le somme delle varie terne, i gruppi sono stati invitati a comunicare a tutti le loro osservazioni. Nel complesso sono apparse tre regolarità:
PRIMA REGOLARITÀ: I risultati si alternano, uno pari e uno dispari (Vedi figura 1.1. Questa figura e le successive figura 1.2, figura 1.3 e figura 1.4 riproducono alcuni dei cartelloni preparati alla fine dellʼattività per illustrare ai genitori degli alunni, nel corso di una manifestazione di fine dʼanno, il percorso compiuto dalla classe. Pertanto i loro contenuti riassumono lʼintera attività e non le sue varie fasi. In figura 1.1 ad esempio è evidenziata la parità di numeri e somme di terne che si susseguono a caso e non secondo un ordine preciso).

[2] Questa osservazione è di grandissima importanza. Lʼinsegnante qui si rende conto, in un caso particolare, di come parti successive del programma di matematica possono essere riconosciute come tappe di un processo spontaneo. Ebbene, questo è vero per quasi ogni argomento di matematica, anche se non è affatto facile esserne consapevoli a priori, se non si domina la materia in modo raffinato. Malgrado questa difficoltà, qui si vede però come unʼattività esplorativa, del tipo di quella proposta, permette di far venire naturalmente alla luce questi processi spontanei, e quindi consente agli alunni di acquisire nuova conoscenza senza che gli venga imposta dallʼesterno, e nello stesso tempo allʼinsegnante di rendersi conto della radice naturale di alcuni particolari contenuti matematici.

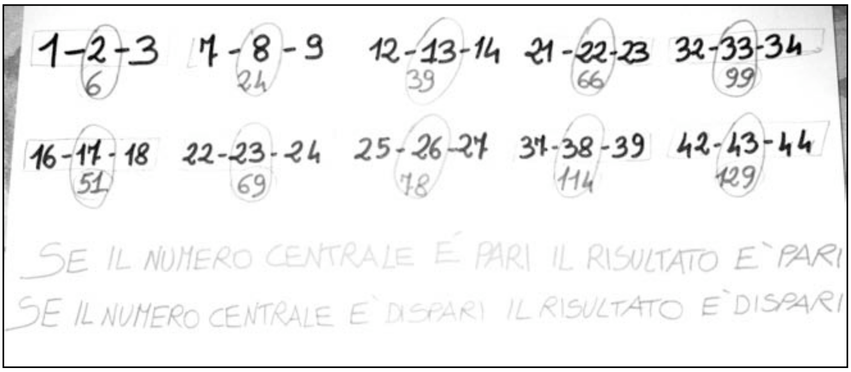


Figura 1.1

SECONDA REGOLARITÀ: Ogni risultato successivo si ottiene aggiungendo 9 al risultato precedente.
TERZA REGOLARITÀ: Questo incremento di 9 fra due risultati consecutivi si traduce nel fatto che la cifra delle unità diminuisce di 1 e quella delle decine aumenta di 1.
Ognuna delle suddette tre regolarità viene verificata per tutta l'estensione delle terne di numeri consecutivi prese in considerazione. Ma mentre le prime due regolarità trovano sempre conferma, nel verificare la terza ci siamo accorti che essa si interrompe. Dopo aver controllato l'esattezza dei calcoli, abbiamo continuato ad osservare le somme successive. E abbiamo visto che la regolarità torna e poi si interrompe di nuovo. A questo punto, Gabriele ha detto: quando c'è 0 alle unità la decina si ripete: 60-69; 150-159.
Tutti abbiamo concordato che anche questa è una REGOLARITÀ.
Per scoprire l'altra REGOLARITÀ, quella più appariscente, che tutte le somme sono multipli di 3, occorre naturalmente avere chiaro il significato di "multiplo/divisore" e avere la capacità di riconoscerli. In seconda elementare tali competenze potrebbero non essere ancora presenti. Si possono seguire varie strade: escludere questa scoperta e lavorare solo sulle altre; approfittare dell'attività per introdurre queste nozioni, o infine trattarle in modo preliminare per usarle dentro l'attività. Ho scelto questa terza strada. A questo scopo, prima di partire con questo lavoro, nelle precedenti lezioni ho ritenuto opportuno portare i bambini ad individuare i numeri primi e i numeri composti fino al 50.
Alla fine di questo lavoro preliminare (di cui nell'Appendice a questo paragrafo 1 sono riportati alcuni aspetti salienti), i bambini erano a conoscenza di alcuni semplici criteri di divisibilità: sono divisibili per 2,

cioè sono pari tutti i numeri che terminano per 0 o 2 o 4 o 6 o 8; sono divisibili per 5 tutti i numeri che terminano per 0 o 5; sono divisibili per 3 tutti i numeri la cui somma dà 3 o un multiplo di 3; sono divisibili per 11 i numeri (minori di 100) che hanno le cifre uguali (22, 33, 44, …).
Per scoprire la regola relativa ai multipli di 3, è stato necessario un mio intervento: i bambini sono stati invitati a porre l'attenzione sulle somme e precisamente sulle cifre delle somme; da qui è scaturita l'osservazione che sommando le cifre il risultato è sempre un multiplo di 3. (Nella figura 1.2, sulla sinistra viene esemplificato il procedimento – sulla destra è invece riportato quanto scoperto in una fase successiva).

Figura 1.2

Seconda lezione
Ho proposto loro di lavorare con un'altra sequenza ordinata: 0-1-2; 1-2-3; 2-3-4; 3-4-5, …
Mi rendo conto di avere in questo modo orientato gli studenti in una direzione ben precisa. In altre parole suggerire di lavorare, qui e dopo, con sequenze ordinate può essere visto come un secondo **condizionamento**.
Abbastanza velocemente sono venute fuori le regolarità:

1. L'alternanza di un numero pari e un numero dispari per le somme delle terne successive;
2. Ogni somma successiva si ottiene sempre dalla precedente aggiungendo 3;

3. Tutti[3] i risultati sono multipli di 3.

Ho proposto ancora un'altra sequenza regolare: 0-1-2; 2-3-4; 4-5-6; 6-7-8,… (figura 1.3). Ora sono più veloci a scoprire le regolarità:

1. Le somme sono tutte dispari;
2. Le somme sono multiple di 3;
3. Ogni somma successiva si ottiene sempre dalla precedente aggiungendo 6.

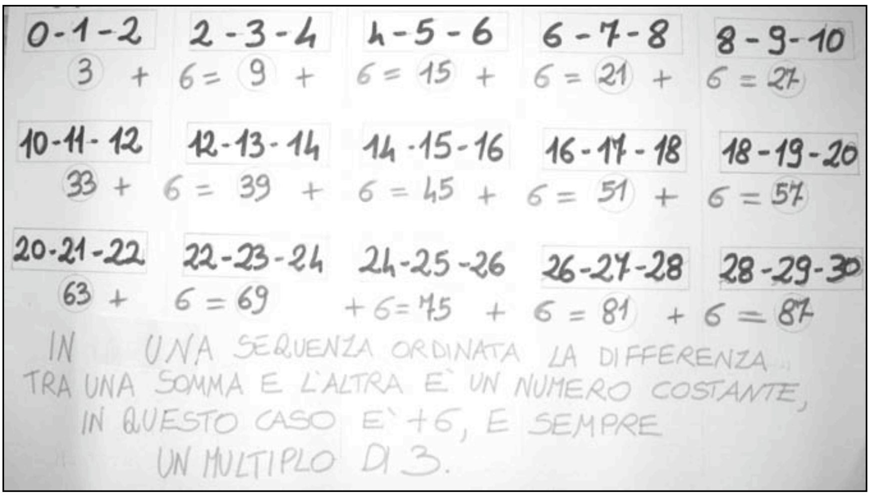


Figura 1.3

[3] L'uso di questa parolina "tutti", o dell'altra "sempre", e di tutte quelle espressioni che servono a generalizzare, ricorre continuamente nelle osservazioni degli studenti, ed anche nel nostro modo comune di esprimerci. Ma è una parolina che nasconde quasi sempre – in particolare se stiamo parlando di collezioni infinite, come sono quelle dei numeri – una notevole ambiguità. Quello che si vuole dire è: a) che una certa cosa si è verificata tutte le volte che la si è osservata, oppure: b) che essa si verifica in tutti i casi, sia quelli visti che anche gli altri? O magari si vogliono dire entrambe le cose? Ora, nel primo caso l'affermazione è un modo per registrare un'informazione "empirica" e certa. Nel secondo caso l'affermazione è l'enunciato di una legge generale, e non può essere che un'ipotesi o congettura, e restare a questo livello, a meno che non venga sottoposta ad un procedimento di conferma o di confutazione. Stiamo nientemeno provando a capire che cosa significa il pensiero scientifico, in altre parole come lavorano gli scienziati. E sarebbe assai produttivo se l'insegnante intervenisse qualche volta in casi come questi per stimolare questo genere di riflessioni e cominciare ad avviare i suoi studenti verso questa strada, che dovranno percorrere con sempre maggiore determinazione negli anni a venire.

Terza lezione
In questa lezione ho proposto di non scegliere una sequenza ordinata, ma di prendere a caso un gruppo di 3 numeri consecutivi (lavora il gruppo classe).
Ogni alunno ha scelto una sequenza: Gabriele 1-2-3; Domenico 6-7-8; Giuseppe 12-13-14; Anna 21-22-23; Angelo 39-40-41, Ivan 83-84-85.
Con questa modalità siamo arrivati subito a dover calcolare "grandi somme" ed è diventato più difficile il calcolo orale. Allora ho proposto loro di osservare bene i 3 numeri consecutivi e di cercare la strada per agevolare il calcolo (Terzo **condizionamento**).[4] Dopo vari tentativi e con il mio aiuto, Ivan ha osservato: "Se togliamo una unità all'ultimo numero consecutivo e la diamo al primo, i tre numeri diventano uguali e se lo moltiplichiamo per tre facciamo prima". (Vedi figura 1.4)[5].
È questo il momento di fare una lezione sul calcolo veloce usando i tripli con cui avevo già lavorato per la preparazione alle tabelline.
La lezione è questa: per sommare 3 numeri uguali con il calcolo veloce occorre conoscere il triplo dei numeri da 1 a 9, moltiplicarlo per 10 se sono decine, per 100 se sono centinaia e poi sommare questi risultati al triplo delle unità.

---

[4] Come già osservato nella Nota 1, è molto importante che l'insegnante si renda conto lucidamente delle circostanze in cui i suoi interventi influenzano ed orientano l'andamento delle attività di classe e i percorsi mentali degli alunni. Ciò non implica assolutamente un giudizio sulla validità di tali interventi (come forse la parola "condizionamento" usata dall'insegnante potrebbe far credere), né vuole in nessun modo suggerire che l'insegnante debba astenersi dall'intervenire. E' anzi fondamentale il ruolo attivo dell'insegnante, e il rendersene conto serve appunto a crescere nella capacità di farlo in modo sempre più consapevole ed efficace.

[5] La "scoperta" di Ivan è assai importante e merita un'attenta riflessione. La sua esigenza, che è peraltro quella dell'intera classe, è trovare il modo per fare più in fretta il calcolo della somma. Per ottenere questo, Ivan scopre una proprietà generale "La somma è uguale a tre volte il numero centrale", e ne dà una ineccepibile giustificazione. Non se ne accorge lui e forse nemmeno l'insegnante, ma la sua è un'autentica "dimostrazione", che si svolge utilizzando la lingua naturale senza l'ausilio di simboli algebrici. La fig. 4 ci aiuta a seguire la genesi della sua conclusione generale che parte dall'osservazione di come funziona il meccanismo in alcuni casi, e ne costruisce una rappresentazione grafica efficace con l'uso dei regoli. Per noi non è difficile tradurre l'argomento di Ivan servendoci delle lettere: $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$. Guarda caso, ci ritroviamo con quello che elaborano i ragazzi di scuola media (vedi i paragrafi 2 e 3 successivi). Ma qui stiamo in seconda elementare! Vuol dire che a questa età i bambini sono pienamente capaci di ragionare e di farlo in termini generali, che queste abilità possono dunque essere riconosciute e valorizzate fin dalla scuola primaria e che se si riesce a far questo si pongono le basi per un proseguimento assai proficuo del processo di conoscenza negli anni futuri. Torneremo su questo nel paragrafo 4.1.

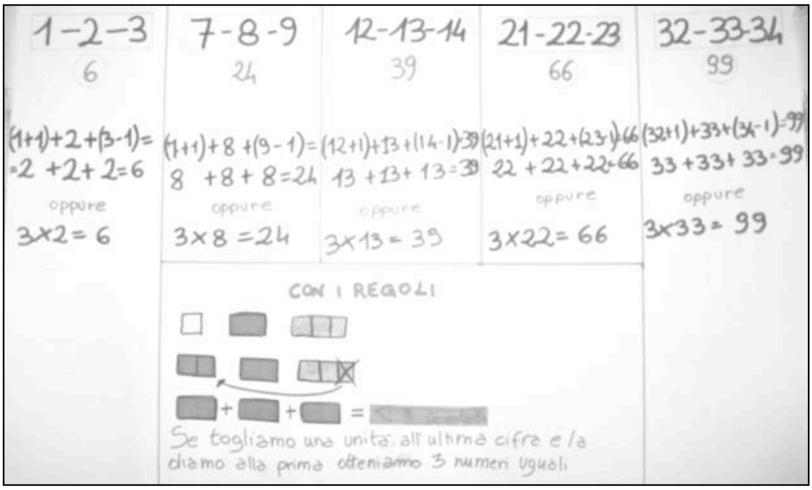


Figura 1.4

Esempi:

1) Calcolare 21 + 21 + 21. Il triplo di 2 è 6. Allora: $3 \times 21 = (6 \times 10) + (3 \times 1) = 60 + 3 = 63$.
2) Calcolare 84 + 84 + 84. Il triplo di 8 è 24. Si ha: $3 \times 84 = (24 \times 10) + (4 \times 3) = 240 + 12 = 252$.
3) Calcolare 123 + 123 + 123. Il triplo di 1 è 3 e $3 \times 100 = 300$, il triplo di 2 è 6 e $6 \times 10 = 60$, il triplo di 3 è 9. Dunque: $3 \times 123 = 300 + 60 + 9 = 369$.[6]

Quarta lezione

Ripetiamo il calcolo veloce con i tripli e riprendiamo le sequenze non ordinate della terza lezione, questa volta formando i soliti 5 gruppi e continuiamo ad osservare le regolarità.

1. Tutti i risultati sono multipli di 3;
2. scompare la regolarità di un numero pari e un numero dispari;
3. scompare la regolarità di tutti i numeri dispari;
4. scompare la regolarità di tutti i numeri pari;
5. la differenza tra una somma e un'altra non è più la stessa (+3, +6, +9).

Nell'osservare ciò è venuta fuori un'altra regolarità: in una sequenza ordinata la differenza tra le somme è sempre un multiplo di 3.

[6] Si veda, per queste procedure di calcolo veloce, quanto detto nella successiva Nota 7.

In quest'ultimo esercizio dove c'è la sequenza di tre numeri consecutivi non ordinata, è rimasta solo una regolarità: le somme sono multipli di tre. A questo punto è arrivato il mio 4° condizionamento: osserviamo e mettiamo in relazione i tre numeri consecutivi con la rispettiva somma. Li ho quindi indirizzati verso un lavoro che ho chiamato verticale. Dopo il suggerimento un'altra scoperta è venuta fuori. Ivan: "Se sommiamo 3 numeri consecutivi, il risultato è pari se il numero centrale è pari, invece è dispari se il numero centrale è dispari". La verifica è stata effettuata in tutte le sequenze, sia quelle ordinate che quelle prese a caso.
Riprende la ricerca delle regolarità. Il gruppo di Federica mi chiama perché ha fatto un'altra scoperta: le somme sono sempre pari e le loro cifre delle unità si ripetono secondo la sequenza 2-4-6-8-0… Osservo meglio la sequenza su cui sta lavorando il gruppo e noto che essa non è stata presa a caso, ma è una sequenza ordinata, dopo 3 numeri consecutivi viene lasciato il seguente e riprende la sequenza: 11-12-13 / 15-16-17 / 19-20-21 / 23-24-25. In questa sequenza ritornano tutte le regolarità del primo esercizio, compresa quella che tra una somma ed un'altra c'è sempre una differenza fissa che in questo caso è +12 e si conferma la regolarità che la differenza tra le somme è sempre un multiplo di 3.

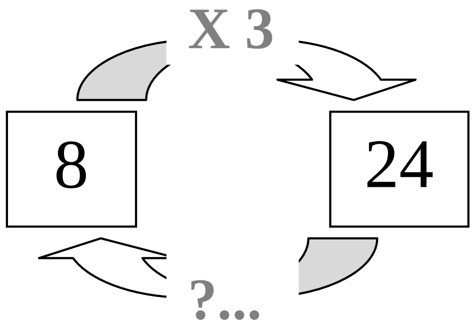
Quinta lezione
Riprendiamo il lavoro, questa volta partendo dalle somme.

> Maestra: Vi dò alcune somme: 12-18-24-36-39-45 e voi dovete risalire alle terne. Che cosa notate in queste somme?
> Alunni: Sono multipli di 3.

Quindi si può risalire alle terne solo usando numeri multipli di 3. Dalla prima, dalla seconda e dalla terza somma vengono subito fuori le terne: 3-4-5 / 5-6-7 / 7-8-9.

> Maestra: Come mai siete arrivati così velocemente a scoprire le prime 3 terne, mentre trovate difficoltà per le altre 3?
> Alunni: Non ricordiamo i numeri il cui triplo dà 36, 39 e 45.
> Maestra: Li possiamo ricavare?
> Alunni: Sì! Ma ci vuole un po' di tempo.

È il momento di ricordare loro qual è l'operazione inversa della moltiplicazione. Anche quando rispondono che l'operazione inversa della moltiplicazione è la divisione, non hanno ancora capito come procedere nel lavoro. Allora io ricordo loro il seguente schema:



La risposta adesso arriva: bisogna dividere la somma per 3.[7]
La lezione è continuata con l'esercitazione di moltiplicazioni e divisioni dove l'una era la prova dell'altra.

Sesta lezione
Riassumiamo tutto il lavoro scaturito dal laboratorio con una sequenza ordinata (quella della prima lezione): 1-2-3 / 4-5-6 / 7-8-9 /…

---

[7] La fase dell'attività qui descritta consente di fare un breve cenno ad una questione generale che riguarda le quattro operazioni. Di solito nella scuola primaria si insiste sul fatto che ciascuna operazione si può considerare il corrispettivo aritmetico di una ben precisa "azione" (aggiungere, togliere, sommare addendi uguali, ripartire in parti uguali), al punto che spesso nei tipici problemi di aritmetica i bambini si lasciano guidare sull'operazione da eseguire da alcune paroline chiave, presenti nel testo, che richiamano quelle azioni. Questa insistenza è pericolosa, perché questi *significati* delle quattro operazioni si mantengono quasi solo quando si ha a che fare con i numeri naturali e invece si perdono quando si passa ad altre specie di numeri (interi relativi, razionali). È invece importante convogliare da subito l'attenzione sul fatto che le operazioni possono raggrupparsi in due strutture, additiva e moltiplicativa. Nella prima, addizione e sottrazione non sono che due modi complementari di guardare alla stessa situazione, (come una stessa frase scritta usando una volta un verbo attivo e una volta quello passivo), e lo stesso vale per moltiplicazione e divisione dentro la struttura moltiplicativa. Questo modo di vedere le cose è peraltro l'unico che ha senso quando si lavora con numeri non naturali, e quindi farlo da subito serve a preparare la strada per i successivi ampliamenti del concetto di numero. Ebbene, la richiesta qui fatta dall'insegnante agli alunni di riconoscere la divisione come operazione inversa della moltiplicazione, e l'uso dello schema al quale con ogni evidenza i bambini erano già stati abituati, va proprio nella direzione voluta. Si noti inoltre come subito dopo si dica di moltiplicazione e divisione che "l'una è la prova dell'altra", usando una terminologia frequente nella scuola, un'operazione come "prova" di un'altra: precisamente si dice che l'addizione è la prova della sottrazione e viceversa e che la moltiplicazione è la prova della divisione e viceversa. Più che sulla nozione di "prova", che rinvia ad un semplice controllo di correttezza di un calcolo, è opportuno comunque insistere sull'idea di coppie di operazioni l'una inversa dell'altra, che punta dritto al significato delle operazioni in gioco. Basti comunque qui questo cenno ad una questione che, naturalmente, meriterebbe un ben più lungo approfondimento.

Ora procedono veloci nel calcolare le somme attraverso il triplo del numero centrale, qualcuno trova più comodo aggiungere 9 alla somma precedente, qualcun altro si ricorda che la decina sale e l'unità scende, tutte valide strategie per calcolare la somma successiva. **È stato interessante osservare come tali abilità sono diventate conoscenze e poi competenze solo dopo averle messe in pratica**.[8]
Ora gli alunni sanno che:

- la somma di tre numeri consecutivi è sempre un multiplo di 3 e del numero centrale (vedi figura 1.2);
- per arrivare alla somma basta moltiplicare il numero centrale per 3;
- per arrivare alla terna bisogna dividere la somma per 3 per ottenere il numero centrale;
- se il numero centrale è pari il risultato è pari, se il numero centrale è dispari il risultato è dispari;
- in una serie ordinata la differenza tra un risultato e un altro è sempre costante e sempre un multiplo di 3.
- in una serie ordinata i risultati possono essere sempre pari, sempre dispari, ovvero uno pari e uno dispari.

Conclusioni
Mi sono chiesta, anche in seguito a sollecitazioni esterne, se il gioco dei numeri consecutivi abbia tolto tempo e spazio alle attività didattiche curricolari. Beh… assolutamente no! Infatti:

- con una qualsiasi attività matematica si possono consolidare gli obiettivi della programmazione didattica;
- una qualsiasi attività matematica porta a riflettere, modificare, aggiornare o deviare gli obiettivi a lungo o a breve termine programmati (flessibilità della programmazione);
- un qualsiasi lavoro che scaturisce da una qualsiasi situazione problematica, rientra nella programmazione annuale.

Con il laboratorio dei numeri consecutivi, inserito nella programmazione didattica annuale, nonché in quella in itinere, i miei alunni hanno:

- *rafforzato* il calcolo orale;

[8] Molto interessante questo gioco di mutuo rinforzo tra scoperta di una regola e suo impiego per semplificare una procedura. Del tutto condivisibile l'affermazione che l'impiego, meglio se spontaneo o comunque fatto proprio, di una regola in una situazione di applicazione è la condizione per impadronirsi della relativa competenza.

- *consolidato* il concetto della moltiplicazione, anche come addizione ripetuta;
- *sperimentato* ancora una volta il triplo dei numeri;
- *imparato* a riconoscere i numeri primi e i numeri composti e quindi i multipli e i divisori;
- *considerato* come utile la distinzione tra numeri pari e numeri dispari;
- *attuato* diverse strategie di calcolo per fare proprie quelle più immediate;
- *messo in atto* un lavoro di ricerca e di sperimentazione per cercare le regolarità.

Nel lavoro "di ricerca" le scoperte sono state condivise e fatte proprie dal gruppo e non dal singolo componente, favorendo così il senso della cooperazione e dell'integrazione.
Nel corso dell'attività ho osservato come, al di là dei miei condizionamenti, i bambini comunque abbiano preferito lavorare in modo orizzontale piuttosto che verticale, e con una serie ordinata di terne di numeri piuttosto con terne prese a caso. Viene comunque da chiedersi come si sarebbero sviluppate le cose se le mie scelte e i miei interventi fossero stati diversi da quelli adottati.

Appendice. Uso dei doppi e dei tripli nell'apprendimento delle tabelline.
Premesso che i tripli e i doppi sono programma ministeriale che deve cominciare già dalla seconda primaria e che tutto si studia non perché è fine a se stesso, ma perché deve essere applicato quando ce n'è la necessità, i doppi e i tripli possono risultare un metodo alternativo per l'acquisizione delle tabelline. Queste ultime, o che vengano presentate agli alunni con la famosa cantilena "2 × 0 uguale a 0; 2 × 1 uguale 2; 2 × 2 uguale 4…", o che vengano fatte costruire con oggetti o disegni, o ancora che vengano costruite con i regoli e poi con la rappresentazione a colori sul cartellone, il fine è sempre quello. L'importante è che alla domanda: "Quanto fa 6 × 7?" gli alunni sappiano rispondere 42. Ora mi chiedo se la risposta non arriva perché gli alunni non sono riusciti a memorizzare tutte le tabelline (non sono poesie con parole rime e assonanze, ma simboli astratti), che cosa fa l'insegnante per ottenere la risposta?

- fa ripetere la cantilena 6 × 1 = 6; 6 × 2 = 12…;
- fa contare per 6 fino a 7 volte (sempre che il bambino ci riesca);

- fa dire la risposta ad un compagno;
- dice “impara le tabelline, che ti interrogo la prossima volta”.

Non sarebbe forse più gratificante ricevere come risposta: “Non lo so, ma lo posso calcolare”? Infatti un metodo alternativo per calcolare un prodotto potrebbe essere usare i doppi e i tripli. Nel nostro esempio, per calcolare il prodotto 6 × 7, bisogna prendere 6 volte il 7, quindi due volte il triplo di 7, cioè il triplo più il triplo: 21 + 21 = 42. Nei vari casi sarà l’insegnante insieme agli alunni a concordare quando è conveniente usare i doppi e i tripli. I doppi si prestano di più quando c’è da prendere un numero 2 volte, 4 volte, 8 volte; i tripli nel caso di 3 volte, 6 volte, 9 volte. Ad esempio 9 × 9 = triplo di 9 + triplo di 9 + triplo di 9 = 27 + 27 + 27. Al risultato finale 81 si può infine arrivare o ricordando quanto fa il triplo di 27 oppure eseguendo:

$$27 + 27 + 27 = 3 \times 27 = (3 \times 20) + (3 \times 7) = 60 + 21 = 81.$$

Ciò non toglie che gli alunni possono usare i doppi e tripli in modo misto e in particolar modo per calcolare 5, 7 e 8 volte. Infatti:
triplo + triplo + doppio = 8 volte
triplo + triplo + una volta = 7 volte
doppio + doppio + doppio + una volta = 7 volte
triplo più doppio = 5 volte
Esempio: 8 × 5 = triplo di 5 + triplo di 5 + doppio di 5 = 15 + 15 + 10 = 3 decine + (5 unità + 5 unità) = 30 + 10 = 40.
Viceversa: 5 × 8 = triplo di 8 + doppio di 8 = 24 + 16 = 3 decine + (4 unità + 6 unità) = 30 + 10 = 40.
È consigliabile in questo lavoro chiamare il segno × col termine “**volte”** o “**di”**.
Se gli alunni vengono preparati a calcolare il doppio dei numeri fino a 50 e il triplo fino a 33 si prepara il terreno per le tabelline. Non è difficile il lavoro dei doppi e dei tripli perché basta impararli bene fino al 10, poi per continuare bisogna calcolare il doppio e il triplo delle decine e il doppio e il triplo delle unità da 1 a 9.
Ho cominciato questo lavoro alla fine della prima classe fino al numero 10. Ho continuato nella seconda classe e alla fine del primo quadrimestre gli alunni erano già capaci di calcolare le tabelline. Per esperienza fatta posso dire che è più emozionante per l’insegnante sentire: “Non lo so,

ma lo posso calcolare", piuttosto che sentire il bambino dire le tabelline leggendo il cartellone a cantilena.[9]

2. Seconda esperienza. Classe 3ª C, Scuola Media.
Istituto Comprensivo "J. F. Kennedy" di Cusano Mutri.
Prof. Antonietta Guerra.
La classe che ha svolto l'attività sui numeri consecutivi è una III media con una preparazione carente, abituata ad un metodo di insegnamento della matematica piuttosto tradizionale. I ragazzi hanno avuto poi un approccio laboratoriale alla disciplina, in particolare l'attività sperimentale svolta, avvertita come piacevole, è diventata uno strumento prezioso per creare nella classe un clima più favorevole all'apprendimento. Gli alunni,

---

[9] L'insegnante espone qui il suo metodo per far apprendere le tabelline ai bambini. Va precisato che quest'attività è frutto di scelte didattiche pregresse e non è stata argomento di aggiornamento. Proprio per questo mi sembra utile fare a margine alcune osservazioni. A mio giudizio è del tutto condivisibile la preferenza che viene accordata ad un metodo che fa capire *perché* si ottiene un certo risultato piuttosto che farlo imparare a memoria. Mi sembra però anche importante accennare ad un altro aspetto, che non viene evidenziato dall'insegnante in modo esplicito, ma che illustra come questo metodo, e più in generale l'apprendimento di abilità di calcolo mentale, abbia conseguenze cognitive forse anche più importanti. A quanto pare i bambini sono molto ricettivi nell'imparare ad eseguire a mente i calcoli più diversi, e questa abilità può e deve essere sfruttata, al fine degli apprendimenti successivi. Si possono rilevare molti contenuti matematici, ma uno è particolarmente significativo. Nei calcoli illustrati dall'insegnante si fa uso abbondante e disinvolto di tutte le proprietà delle due operazioni di somma e di prodotto (associative, commutative, distributiva). Ad esempio $8 \times 5 = 5 \times 8$ è un'applicazione della proprietà commutativa del prodotto; il fatto che "per calcolare il prodotto 6×7, bisogna prendere 6 volte il 7, quindi due volte il triplo di 7", che a scriverlo diventa: $6 \times 7 = (2 \times 3) \times 7 = 2 \times (3 \times 7) = 2 \times 21$, contiene un'applicazione della proprietà associativa del prodotto; o ancora si riconosce la proprietà distributiva nell'esempio $3 \times 27 = (3 \times 20) + (3 \times 7)$. E si potrebbe continuare, anzi l'invito al lettore è di cercare da sé altre applicazioni delle proprietà delle operazioni in tutti i calcoli riportati. Ora il fatto che queste proprietà vengano usate in modo disinvolto dagli alunni sotto la guida dell'insegnante fa capire come esse siano per loro relativamente facili e in certa misura spontanee. E come sia dunque un errore presentarle, come spesso avviene, come delle regole ancora una volta da imparare a memoria e sganciate dall'esperienza che un bambino ha già alle sue spalle. Quello che sarebbe preziosissimo per gli alunni è invece che essi siano portati gradualmente a rendersi conto del fatto che fanno uso continuamente di queste proprietà, e quindi imparare come cosa nuova solo che esse hanno un nome. Ci rendiamo conto naturalmente che adottare questo approccio all'insegnamento della matematica in modo sistematico non è affatto facile, neppure per un bravo insegnante, ma ci preme sottolineare che è comunque utile sfruttare anche singole occasioni in cui ci si accorge di poter procedere così.

curiosi e interessati, hanno partecipato con particolare entusiasmo e hanno imparato ad ascoltarsi, a confrontarsi, ad accettare le opinioni degli altri, ma anche a formulare ipotesi, a trovare soluzioni, a inventare o a rappresentare.
I ragazzi hanno avuto le indicazioni su cui lavorare (SCRIVERE SERIE DI TRE NUMERI CONSECUTIVI E FARE OSSERVAZIONI SU DI ESSE) e singolarmente o in gruppo hanno fatto le riflessioni e gli interventi.

Prima parte
(Il tempo dedicato a questa prima parte si è aggirato intorno alle due ore).
Ricevuta la consegna, i ragazzi hanno formulato le serie di numeri in modo diverso, ma riconducibili tutte alle tre seguenti, di ciascuna delle quali riportiamo solo le prime quattro terne:

Serie 1				**Serie 2**				**Serie 3**		
1	2	3		1	2	3		1	2	3
2	3	4		3	4	5		4	5	6
3	4	5		5	6	7		7	8	9
4	5	6		7	8	9		10	11	12
…				…				…		

La prima considerazione è stata relativa al fatto che ognuno di loro stava lavorando su numeri diversi, non avendo avuto ulteriori indicazioni. Hanno guardato poi le sequenze con attenzione, e hanno "visto" che potevano addizionare i numeri.[10] Hanno **calcolato le somme in orizzontale** ed ottenuto questi risultati:

- **Serie 1**: le somme in orizzontale sono 6, 9, 12, …, cioè tutti[11] multipli di 3 che aumentano di 3 in 3 (vedi figura 1.5, in cui è riprodotto un foglio di lavoro di uno degli studenti).
- **Serie 2**: le somme in orizzontale sono 6, 12, 18, …, cioè tutti multipli di 6 e di 3 e di 2, che aumentano di 6 in 6.
- **Serie 3**: le somme in orizzontale sono 6, 15, 24, …, tutti multipli di 3 che aumentano di 9 in 9.

[10] In questa esperienza dunque la proposta di sommare i tre numeri non è stata fatta esplicitamente dall'insegnante ma in qualche modo scaturita dagli stessi studenti. È ancora una riprova della grande varietà di modi con cui l'attività può essere presentata.

[11] Vedi la precedente Nota 3.

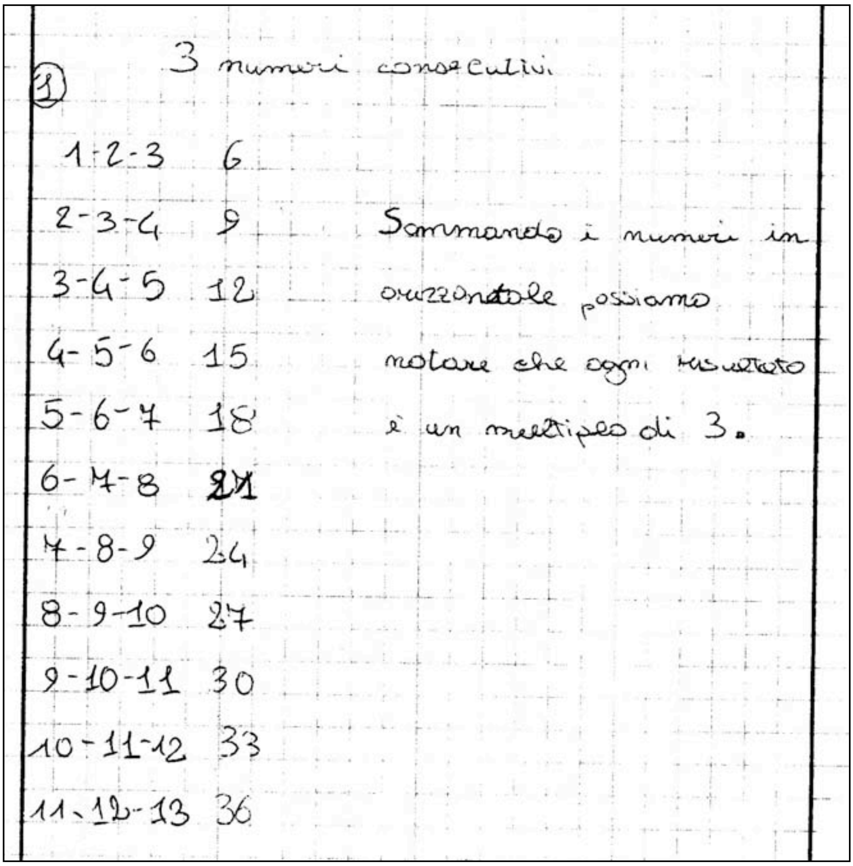


Figura 1.5

Ancora **considerando le somme in orizzontale,** hanno scoperto che esse sono sempre uguali al numero centrale moltiplicato per 3.
Hanno poi osservato che se **la terna inizia con numero dispari il risultato è pari e viceversa**. Ed hanno espresso questo risultato usando le espressioni:

$$d + p + d = p \qquad\qquad p + d + p = d.$$

In questa formulazione si può notare un primo tentativo di utilizzare dei simboli di tipo algebrico, anche se le lettere sono usate in una forma che non può dirsi corretta dal punto di vista algebrico.[12]

[12] Come osserva l'insegnante, la scrittura adoperata dai ragazzi, se pure abbastanza efficace per esprimere quello che essi intendono dire, non risponde alle regole del

Hanno provato ad **addizionare i numeri anche in verticale nelle diverse serie.** Qui hanno capito che bisogna decidere quanti addendi si vogliono sommare. Se sommiamo ad esempio i primi quattro addendi della Serie 1, ci si accorge che le somme aumentano di 4 in 4. In questo caso su ogni colonna i numeri che si addizionano aumentano di 1 in 1. Nella Serie 2 le somme anche aumentano di 4 in 4, ma i numeri che si addizionano si incrementano di 2 in 2. La stessa cosa succede pure per la Serie 3, mentre i numeri che si addizionano aumentano di 3 in 3.

1 +	2 +	3 +	1 +	2 +	3 +	1 +	2 +	3 +
2 +	3 +	4 +	4 +	5 +	6 +	3 +	4 +	5 +
3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	9 +	5 +	6 +	7 +
4 =	5 =	6 =	10 =	11 =	12 =	7 =	8 =	9 =
10	14	18	22	26	30	16	20	24

Se invece di quattro sommiamo in verticale un numero diverso di addendi, si vede che le somme differiscono sempre di una quantità pari a tale numero di addendi, e che questa differenza non dipende dalla serie che viene considerata.

Hanno poi guardato i numeri posti sulle **diagonali** delle tabelle (da sinistra in alto verso destra in basso) e hanno osservato che, addizionando questi numeri, si ottiene sempre un multiplo di 3; e che le varie somme della Serie 1 aumentano progressivamente di 2, quelle della Serie 2 aumentano di 3 e quelle della Serie 3 aumentano di 4. Hanno poi analizzato la diagonali opposte (da destra in alto verso sinistra in basso) scoprendo che nella Serie 1 i numeri sono identici, nella Serie 2 di 1 unità, nella Serie 3 di 2 unità. (Vedi figura 1.6).

---

linguaggio algebrico. In particolare se si adopera una lettera per indicare un numero, occorre che se viene ripetuta, quella lettera indichi sempre lo stesso numero. Nel nostro caso invece la lettera *p* (e analogamente la lettera *d*) viene usata per denotare numeri pari diversi. Tuttavia, come sempre nell'insegnamento della matematica, se si vuole che le cose non cadano dall'alto, ma siano per quanto possibile frutto delle necessità degli studenti e dei loro sforzi per farvi fronte, allora l'impiego di una scrittura anche approssimativa deve essere salutato come un passo avanti importante. E il rispetto delle regole d'uso del linguaggio algebrico sarà un punto di arrivo non certo immediato, ma ottenuto mano a mano in base ad esigenze di comunicare in modo sempre più efficace e non ambiguo i contenuti di aritmetica.

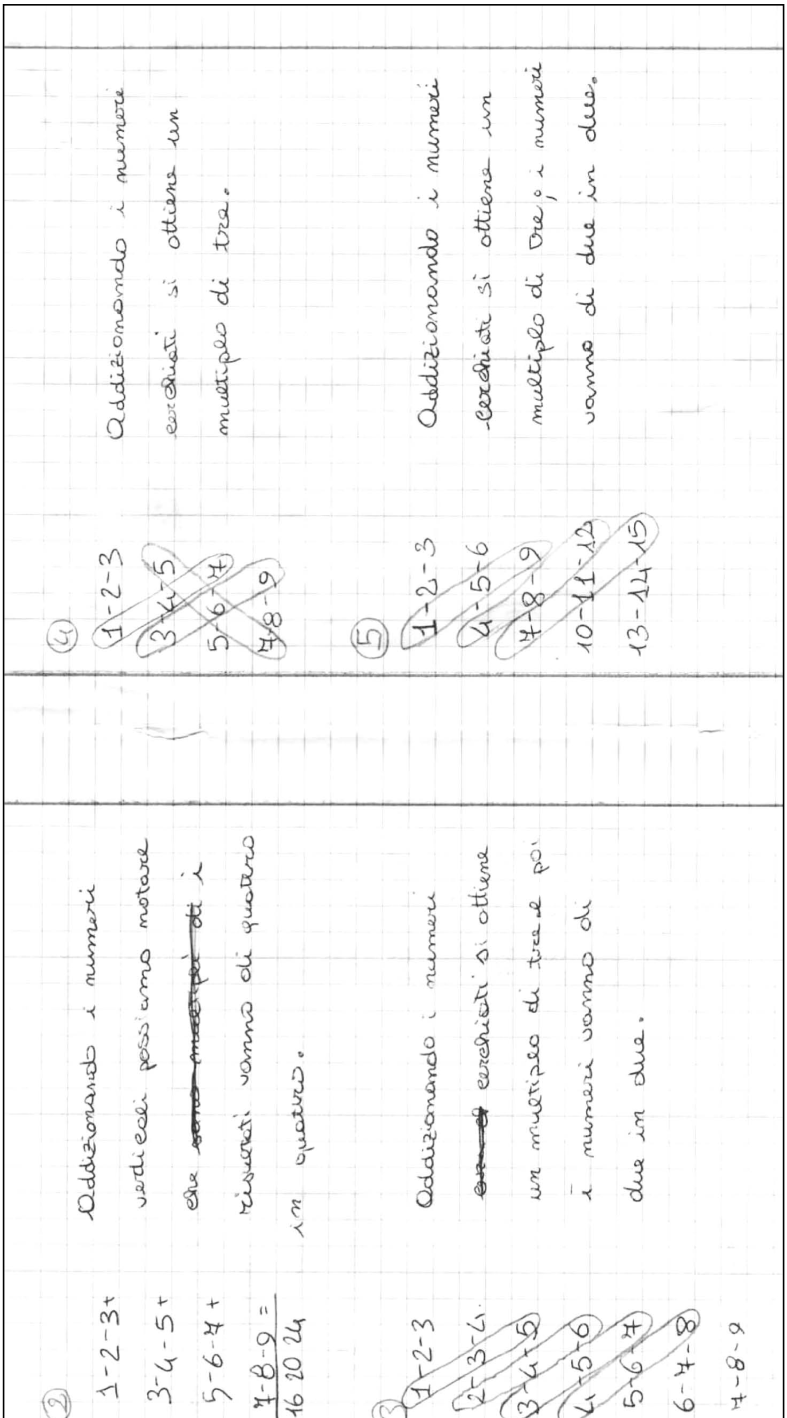

2
1-2-3+
3-4-5+
5-6-7+
7-8-9=
16 20 24
Addizionando i numeri verticali possiamo notare che ~~sono multipli di~~ i risultati vanno di quattro in quattro.
3
1-2-3
2-3-4
3-4-5
4-5-6
5-6-7
6-7-8
7-8-9
Addizionando i numeri cerchiati si ottiene un multiplo di tre e poi i numeri vanno di due in due.
4
1-2-3
3-4-5
5-6-7
7-8-9
Addizionando i numeri cerchiati si ottiene un multiplo di tre.
5
1-2-3
4-5-6
7-8-9
10-11-12
13-14-15
Addizionando i numeri cerchiati si ottiene un multiplo di tre, i numeri vanno di due in due.

Figura 1.6

In questa prima parte i ragazzi hanno effettuato osservazioni e analisi di carattere aritmetico, ma la disposizione dei numeri in tabelle ha anche consentito di sfruttare spunti di natura geometrica, per esempio nella considerazione delle diagonali.

Seconda parte

In questa seconda fase viene chiesto ai ragazzi se ricordano di avere già in precedenti occasioni rappresentato i numeri in un modo diverso, più generale, facendo ricorso alle lettere. I ragazzi citano così il simbolo ***n*** utilizzato per i numeri naturali. Così stimolati, essi riescono a **rappresentare** tre numeri consecutivi nei due modi seguenti:

$$n \qquad (n + 1) \qquad (n + 2)$$
$$(n - 1) \qquad n \qquad (n + 1)$$

Sono stati poi **invitati**[13] **ad addizionare** questi simboli e hanno ottenuto

- nel primo caso: $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$
  (e siamo giunti a considerare la proprietà distributiva che – hanno riferito – adesso sembrava avesse un "nuovo" significato: in effetti ne avevano trovato un'applicazione concreta)
- nel secondo caso: $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$

Questo lavoro ha preceduto le attività sul calcolo letterale.
L'attività è proseguita con la richiesta di guardare ancora attentamente le terne di tre numeri consecutivi, per cercare altre proprietà.[14] Questa volta

---

[13] L'insegnante suggerisce frequentemente agli alunni come procedere. Ciò consente di avanzare speditamente lungo le varie tappe del percorso. Qui si vuole proporre al lettore di provare anche a immaginare come andrebbe la lezione se si lasciasse più tempo agli studenti di far maturare le esigenze, di richiamare alla memoria strumenti usati in altre occasioni, adattarli alla situazione o inventarne di nuovi, confrontare tra pari e però comunque guidati discretamente dall'insegnante, obiettivi, ipotesi e strategie. Vedi anche la successiva Nota 24.

[14] Il linguaggio algebrico è stato utilizzato per dare una rappresentazione "generale" della somma di tre numeri consecutivi. Questa fase ha le sue difficoltà e riuscire a usare le lettere in modo corretto e adeguato è già un obiettivo importante e tutt'altro che facile o immediato. Ma bisogna anche aver chiaro che si tratta solo di un primo passo. Non stiamo dicendo che bisogna per forza compiere altri passi subito, ma invece che è importante che l'insegnante abbia chiaro il possibile seguito del percorso e ne tragga poi le conseguenze che la sua esperienza e il contesto in cui opera suggeriscono, eventualmente progettando nuove tappe anche a distanza di tempo. La verità è che lo sforzo di imparare un linguaggio nuovo, qualunque linguaggio, ha senso solo se poi questa lingua si usa per qualche scopo; altrimenti si rischia di far imparare cose che

si è operato sulle terne della Serie 2, in cui ciascuna terna inizia con l'ultimo numero della terna precedente.
Sono venute fuori ancora osservazioni sparse di *carattere aritmetico*. Ad esempio Assunta osserva che la somma del primo e del secondo numero dà il terzo, però i compagni le contestano che ciò accade solo per la prima terna.[15] Debora osserva che il secondo numero meno il primo è uguale ad 1 così come il terzo meno il secondo. Serena che addizionando il primo numero al terzo il risultato è uguale al doppio del secondo. Erica poi sottolinea che, ovviamente, il terzo numero meno il primo dà sempre 2.
Hanno pensato comunque che quanto osservato è da verificare con le altre terne prima di poter fare un discorso comune e quindi **generalizzare le conclusioni**.[16]
Tra le varie osservazioni, una in particolare ha attirato l'attenzione di tutti gli alunni, ed è il fatto che il **termine centrale** di una terna gode della particolare proprietà di essere **uguale alla metà della somma del primo e del terzo termine**. Allora è venuto spontaneo ricercare una ***definizione*** per questo valore ed è stato naturale chiamarlo **la media**. Attenzione, però: gli alunni non hanno mai affrontato prima questo argomento a scuola, dunque in questa occasione è accaduto che un concetto che si conosce a livello intuitivo, per gli stimoli che provengono dallo sport o in generale dalla vita quotidiana, ha avuto un primo inquadramento in ambito matematico.

---

appaiono senza senso e solo imposte d'autorità: niente di peggio. Di quale seguito parliamo? Bene, l'algebra, almeno quella che si studia a scuola, può essere vista fondamentalmente come un linguaggio che permette di ragionare in generale sui numeri e le loro proprietà. Qualche volta questi ragionamenti si riescono a fare in modo convincente anche usando solo parole della lingua italiana, ma, più si cerca di approfondire, più le cose si complicano, più ci si rende conto che servono risorse linguistiche specifiche. Uno dei compiti che dovrebbe avere l'educazione matematica nella scuola di base, è proprio avviare gli studenti a comprendere questo punto, cominciando a fornire e affinare gli strumenti, per consentirgli di usarli con profitto nelle scuole superiori. Torneremo ad ogni modo su questo punto nel paragrafo 4.1, parlando di dimostrazioni.

[15] In un'attività sui numeri come quella di cui ci stiamo occupando, è probabile che ci si accorga con facilità su base puramente intuitiva di quali sono le proprietà vere sempre e quelle che invece si verificano solo in qualche caso. Ma un momento come quello qui descritto, in cui viene posto il problema di discriminare fra le due circostanze, potrebbe essere colto come una preziosa occasione per avviare un discorso generale sulla dimostrazione, come suggerito nel paragrafo 4.1.

[16] Anche qui, sulla distinzione tra verifica e dimostrazione, si rinvia al paragrafo 4.1.

Ho colto così l'occasione per introdurre nelle ore curriculari argomenti di statistica.
I ragazzi si sono posti di nuovo la domanda se la proprietà di questo elemento centrale è verificabile anche nelle altre terne e si sono adoperati per dimostrarlo.[17]
Ho poi ritenuto opportuno suggerire l'utilizzo di **terne di numeri dispari e numeri pari**[18] come le seguenti:

1-3-5	2-4-6
5-7-9	6-8-10
9-11-13	10-12-14

e invitarli a verificare che cosa succede con esse. Sono state anche qui ricavate numerose proprietà analizzando, come fatto in precedenza, ***le somme in orizzontale, in verticale e in diagonale.*** Non riporto in dettaglio questi risultati (ma vedi figura 1.7), perché invece mi sembra più interessante spostare l'attenzione verso ***riflessioni di carattere linguistico***. La domanda è: "**cosa vuol dire numeri consecutivi pari e numeri consecutivi dispari"**?[19] E se invece di prendere numeri pari particolari, come 2, 4, 6, 8, vogliamo descriverli in generale? E i dispari? E, volendo, come emerge dalla discussione con i ragazzi, altri numeri "consecutivi" che distano fra loro di 4?
Suggerisco di nuovo ai ragazzi di utilizzare il linguaggio algebrico per rappresentare queste terne. Alcuni scrivono, per le terne di numeri dispari, $(n, n + 1, n + 2)$, oppure $(n - 1, n, n + 1)$, ma altri fanno notare che queste rappresentazioni simboliche non possono andare bene in quanto sono identiche a quelle usate in precedenza per le terne in cui non era specificato che i numeri fossero tutti pari o dispari. Successivamente Pasquale e Serena propongono

$(n - 2)$	n	$(n + 2)$	per i dispari e
$2n$	$(2n + 2)$	$(2n + 4)$	per i pari.

[17] Vedi nota precedente.

[18] Questo suggerimento è un passaggio cruciale che, come spiegato nel paragrafo 4.2, può condurre a notevoli sviluppi.

[19] La domanda qui lanciata dall'insegnante serve a stimolare, come si vedrà, un'adeguata rappresentazione algebrica delle terne. Vedi però il paragrafo 4.2, per un possibile più ampio sviluppo di una questione linguistica come quella qui evocata.

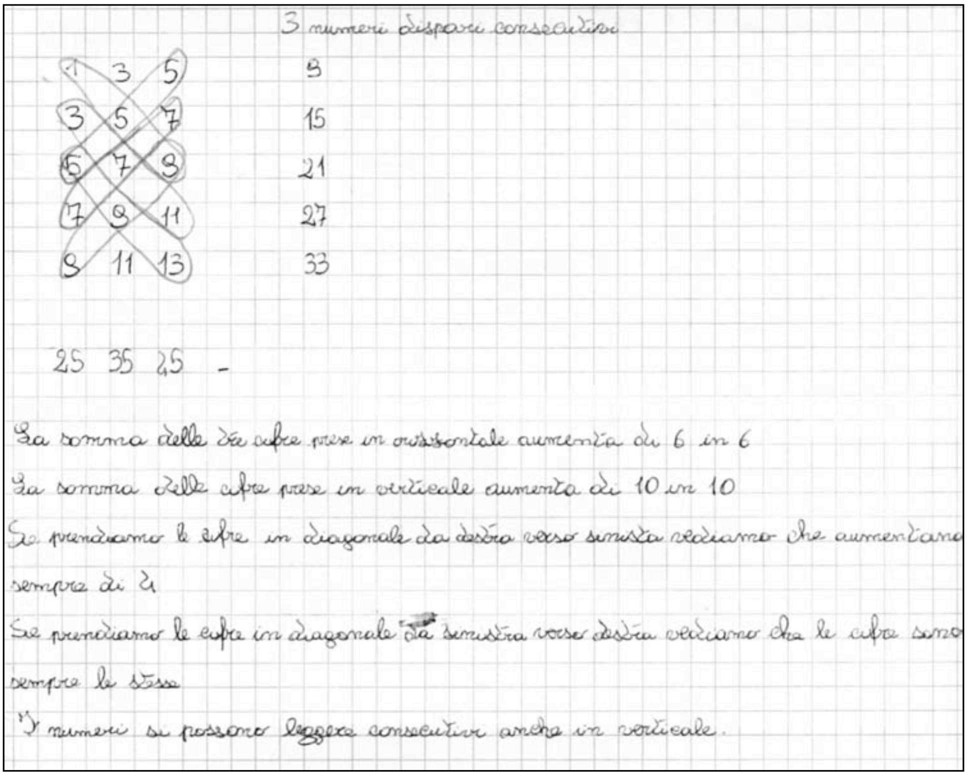


Figura 1.7

Ma ancora viene osservato che per i dispari la scrittura non è corretta[20] ed essa viene finalmente sostituita da una delle due seguenti varianti:

[20] Le cose sono in verità piuttosto sottili, e qui nel racconto dell'insegnante si può intravedere la difficoltà che si incontra prima di arrivare ad usare con padronanza e sicurezza il linguaggio algebrico. E si capisce quanto è importante procedere con molta cautela e pazienza, accompagnando gradualmente i ragazzi in questo lungo percorso. Se infatti il primo tentativo effettuato per rappresentare tre numeri dispari consecutivi, cioè (n, $n + 1$, $n + 2$), o anche ($n - 1$, n, $n + 1$), è certamente inadeguato, perché in queste scritture i tre numeri distano un'unità l'uno dall'altro e quindi non possono essere tutti dispari, il secondo tentativo, ($n - 2$, n, $n + 2$), è già un buon passo avanti. Infatti $n - 2$, n, ed $n + 2$ *possono* senz'altro rappresentare tre numeri dispari consecutivi, visto che questa volta la distanza fra questi numeri è, giustamente, uguale a 2. C'è tuttavia un difetto residuo in questa rappresentazione, ed è una carenza di informazione: infatti guardando alla sequenza ($n - 2$, n, $n + 2$) senza sapere altro, si capisce che i tre numeri rappresentati distano di 2 ciascuno dall'altro, ma non si evince che sono dispari. Di fatto, la rappresentazione che contiene al meglio tutte le informazioni necessarie è quella che segue, cioè ($2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$) oppure ($2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$). Un'ultima osservazione: poteva essere colta in questo momento l'occasione per confrontare queste rappresentazioni trovate e utilizzate per numeri pari

$$(2n + 1) \quad (2n + 3) \quad (2n + 5)$$
$$(2n - 1) \quad (2n + 1) \quad (2n + 3)$$

A questo punto ho ritenuto necessario fare il punto della situazione e sollecitare le riflessioni dei ragazzi. Ho chiesto se c'erano *diverse chiavi di lettura* per queste attività e quali fossero.

I ragazzi hanno considerato che il lavoro ci aveva consentito di fare valutazioni **aritmetiche** (Tanya) con le somme in orizzontale o in verticale ed anche **geometriche** quando sono state "viste" e valutate le diagonali, senza poi dimenticare la necessità di utilizzare i simboli e quindi, come ha detto Giovanni, abbiamo dovuto applicare l'**algebra.** Quando poi c'è stata la necessità di riconoscere la media, ci ha ricordato Mariangela, il discorso ha coinvolto argomenti della **statistica**.

Il discorso si è allargato: alla domanda di Erica circa ***il fine*** dell'attività-ricerca che abbiamo fatto, i ragazzi hanno provato a rispondere da soli. Alla risposta "ingenua" di Giovannangelo (*Per imparare a parlare meglio)*, Francesco ribadisce che essa è servita *per ragionare*, Belisario aggiunge che siamo capaci ora di *raccogliere tanti elementi e organizzare un discorso*. Giuseppe crede che le *cose che sappiamo fare ora le possiamo anche applicare in altre situazioni*, così pure Vincenzo; Giuseppe B. dice che *ha vinto un po' la sua timidezza* visto che è dovuto *intervenire per dire quello che aveva trovato o stava pensando*. Le ragazze, in genere più attive in questa classe, dicono che *hanno maturato altre capacità come quelle di fare ipotesi e di verificarle e di usare un linguaggio più specifico.*

Le parole dei ragazzi potrebbero commentare da sole le finalità del lavoro. Consapevoli di quello che stavano scoprendo, di ciò che avevano acquisito e delle potenzialità che stavano emergendo, essi hanno maturato emotivamente una maggiore disponibilità a proseguire nell'attività dei numeri consecutivi.

Terza parte

A questo punto mi sono spinta oltre[21], e ho chiesto se potevamo lavorare invece che su terne di numeri consecutivi, anche su sequenze

---

e dispari, conformi all'uso corrente in matematica, con quelle usate in precedenza, nella Prima Parte (cfr. anche Nota 12).

[21] Una delle caratteristiche di questo resoconto è il gran numero di questioni e sviluppi che vengono proposti agli studenti da parte dell'insegnante. Nella parte seconda ad esempio sono state introdotte le lettere, i numeri pari e i dispari e questioni linguistiche; in questa parte terza si propone agli studenti di esaminare quaterne di numeri consecutivi, nella parte quarta si prenderanno ancora nuove direzioni. Questo mostra

diverse e quindi li ho invitati a fare **osservazioni su quaterne di numeri consecutivi**.
I ragazzi partono con le loro esplorazioni. Come nel caso di tre numeri, vengono proposte varie sequenze di quaterne, ma poi le osservazioni si concentrano sulle quaterne della serie:

1	2	3	4
4	5	6	7
7	8	9	10

…

Le prime osservazioni, come prima, sono di ***carattere aritmetico***:

- Assunta osserva che la somma del primo e quarto numero è uguale alla somma del secondo e terzo.
- Serena e Giovanni dicono che il secondo per il quarto è uguale a due volte la somma del primo e terzo, ma poi si accorgono che questo è vero solo per la prima quaterna.
- Ancora, sommando il primo e il secondo e poi il terzo e il quarto, vediamo che la differenza tra la seconda somma e la prima è sempre di 4.
- Tanya osserva che le somme in orizzontale aumentano di 12 da una riga all'altra.
- Giovanni aggiunge che la somma di una coppia di numeri consecutivi della quaterna aumentata di 6 è uguale all'analoga somma nella riga successiva.

Poi un po' tutti i ragazzi passano a usare in questo nuovo contesto la nozione ***statistica*** di media:

- Le medie dei due numeri centrali oppure dei due estremi aumentano di 3 nel passare da una riga all'altra. Infatti $(2 + 3)/2 = 5 : 2 = 2{,}5$; $(5 + 6)/2 = 11 : 2 = 5{,}5$; $(8 + 9)/2 = 17 : 2 = 8{,}5$. Oppure $(1 + 4)/2 = 2{,}5$; $(4 + 7)/2 = 5{,}5$, e così via.
- E Francesco dice che anche le medie di tutti e quattro i numeri crescono ad ogni riga di 3. Cioè: $10/4 = 2{,}5$; $22/4 = 5{,}5$; $34/4 = 8{,}5$. E ci si accorge che in ogni riga sono uguali sia la media

senz'altro la smisurata potenzialità di un'attività come quella che stiamo presentando, ma spinge anche naturalmente a interrogarsi su quale sia la migliore strategia di intervento e di conduzione da parte di un insegnante. Con questo, qui non si vuole assolutamente dare una risposta generale di un tipo o di un altro a questa domanda, ma solo richiamare l'attenzione ancora una volta sulla grande influenza che tutte le scelte di un insegnante hanno sull'andamento dell'attività di classe.

dei due numeri centrali, che dei due estremi, che di tutti e quattro i numeri.

- Mariangela prova a fare la media tra il primo e il secondo numero di ogni riga, e osserva che anche questi valori crescono di 3: $(1 + 2)/2 = 1{,}5$; $(4 + 5)/2 = 4{,}5$; $(7 + 8)/2 = 7{,}5$, ecc.
- E lo stesso accade per i numeri terzo e quarto, dice Giuseppe, come è facile vedere.

Qualcuno ripropone ***osservazioni "geometriche"***, esaminando varie combinazioni di numeri **in diagonale**, e infine si giunge alla ***rappresentazione algebrica*** nella forma seguente:

$$n \quad n + 1 \quad n + 2 \quad n + 3$$

Pasquale ed Erica sommano i quattro numeri e ottengono: $4n + 6 = 2(2n + 3)$[22]
Questa parte dell'attività è durata circa 1 ora.

Quarta parte
In una sessione successiva ho chiesto ai ragazzi di **lavorare su terne di numeri decimali** e di considerare sempre numeri decimali consecutivi.[23] Da bravi ragazzi hanno riportato i loro 0,1 0,2 0,3 ecc., ma ho cominciato ad esprimere delle perplessità su quanto stavano scrivendo perché, dicevo loro, mi sembrava che 0,2 non fosse consecutivo di 0,1, subito mi hanno risposto che tra 0,1 e 0,2 poteva esserci ad esempio 0,15. Allora ho chiesto cosa non andava nella richiesta e se poteva esserci un modo più preciso per formularla. Giovannangelo mi dice che devo

[22] Occorrerebbe dare un senso a queste "scoperte" e a questi calcoli. Qui ad esempio è difficile "vedere" che dividendo per 4 il numero $2(2n + 3)$ si ottiene la media aritmetica dei quattro numeri, che è anche la media sia dei due numeri centrali $n + 1$ ed $n + 2$, che dei due estremi n ed $n + 3$.

[23] Anche qui si segue un canovaccio previsto, aprendo così a nuovi e cruciali argomenti di matematica, come il concetto di densità dei numeri razionali, lungo un percorso potenzialmente assai ricco e complesso, come si vedrà meglio nel seguito. Naturalmente la quantità di cose che possono essere trattate e il loro grado di approfondimento dipendono dal tempo che si ha a disposizione. Qui si tratta di un blocco di lezioni e di attività di laboratorio delimitato da altri impegni scolastici. Disponendo di un tempo maggiore da dedicare all'attività, ovvero decidendo di riprenderla in un momento successivo, anche a notevole distanza di tempo, si possono perseguire ulteriori approfondimenti sul piano linguistico, come indicato nell'ultimo paragrafo, e consentire agli studenti di ottenere acquisizioni più raffinate e stabili.

essere più chiara su "*quanti zero*" devono esserci ed Assunta sostiene che la richiesta può essere fatta indicando *se si deve operare con decimi, centesimi o millesimi*. Pasquale continua dicendo che anche "se usasse 10 zeri" forse non troverebbe il consecutivo. Carmine lo incalza: "È chiaro, sono *infiniti*!" Che occasione ghiotta, l'"infinito"![24] Chiedo loro: "Cosa vuol dire infinito?" Risposte: qualcosa che non si può contare, un numero che non finisce mai. Tanya: "Allora ***è un ostacolo*** per noi considerare una cosa infinita". Carmine e Serena: "Quindi è ***come se fosse un limite per noi, per il nostro pensiero, per la nostra mente***".
Si riprende dunque con nuove terne e nuove considerazioni (vedi figura 1.8). Ad esempio Erica e Serena propongono rispettivamente le terne seguenti

2,2	2,3	2,4	3,59	3,60	3,61
2,3	2,4	2,5	3,60	3,61	3,63
2,4	2,5	2,6	3,61	3,62	3,63

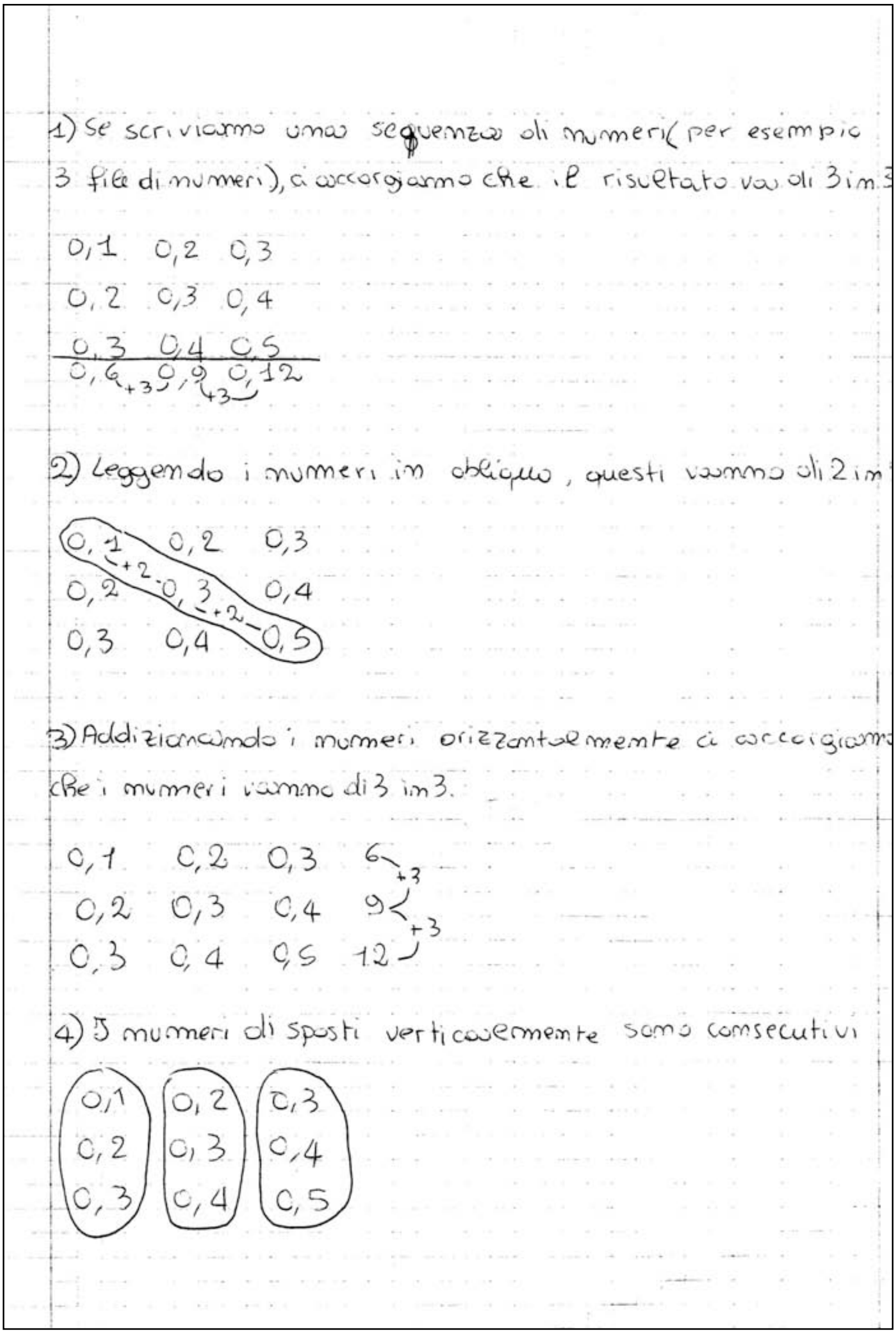
Serena fornisce anche una rappresentazione algebrica della prima sua terna, ottenuta come diretta generalizzazione delle successive riscritture che effettua sui numeri scelti:

3,59	3,60	3,61
3,60 – 0,01	3,60	3,60 + 0,01
(360/100 – 1/100)	360/100	(360/100 + 1/100)
(n/100 – 1/100)	n/100	(n/100 + 1/100)[25]

[24] La scelta dell'insegnante è di non dare tregua ai suoi alunni, incalzandoli con domande sempre più stringenti. Indubbiamente si ottiene così una notevole mobilitazione dei ragazzi e quindi si perseguono obiettivi di tipo metacognitivo relativi soprattutto alla motivazione. Come già detto, disponendo di tempi più lunghi, si potrebbe optare invece per una conduzione più lenta, che lasci ai ragazzi singoli e alla classe intera il tempo necessario per acquisire e far sedimentare ciascuna scoperta e ciascun passaggio. Questo approccio è forse più impegnativo, bisogna stare attenti sempre a non insistere se l'interesse degli alunni scema, ma consente di andare più in profondità. Segnalo con insistenza questa doppia modalità, perché forse questo dualismo travalica la materia di cui stiamo discutendo ed è invece una contrapposizione più radicale tra due diversi modi di approcciare la conoscenza, di cui quello più rapido e più "scintillante" sembra oggi prevalere nella nostra società. Se è così, forse proprio alla scuola spetta di fare ogni sforzo per sperimentare ogni volta che si può percorsi più lenti e più approfonditi.

[25] Si potrebbero fare molte osservazioni su questo elaborato di Serena. Limitandoci a un breve commento, si nota una buona padronanza nel passaggio da scrittura frazionaria a decimale e viceversa di un numero razionale, il riconoscimento del vantaggio di guardare le terne di numeri consecutivi "a partire dal numero centrale", l'uso (o abuso?)

Figura 1.8


1) Se scriviamo una sequenza di numeri (per esempio 3 file di numeri), ci accorgiamo che il risultato va di 3 in 3

0,1 0,2 0,3
0,2 0,3 0,4
0,3 0,4 0,5
0,6 +3 0,9 +3 0,12

2) Leggendo i numeri in obliquo, questi vanno di 2 in

0,1 0,2 0,3
0,2 +2 0,3 0,4
0,3 0,4 +2 0,5

3) Addizionando i numeri orizzontalmente ci accorgiamo che i numeri vanno di 3 in 3.

0,1 0,2 0,3 6 +3
0,2 0,3 0,4 9 +3
0,3 0,4 0,5 12

4) I numeri disposti verticalmente sono consecutivi

0,1 0,2 0,3
0,2 0,3 0,4
0,3 0,4 0,5

della variabile "*n*" vincolata a denotare un numero naturale, la trattazione abbastanza sicura dell'insieme dei "numeri decimali troncati ai centesimi" come insieme ordinato

Poi si sono sbizzarriti a fare queste operazioni con decimali di diverso ordine

3,1936	3,1937	3,1938
5,133947	5,133948	5,133949

Al termine di questa fase, dopo aver rilevato che *diverse delle regolarità che avevano osservato si trovavano ripetute in qualsiasi serie di numeri e quindi potevano essere, hanno provato a trarre delle conclusioni* ***di ordine generale***. Riportiamo le parole di Assunta, Serena e Tanya (vedi figura 1.9):
"*GENERALIZZAZIONI. Possiamo utilizzare numeri con più cifre decimali, li scriviamo in gruppi di tre e nel secondo gruppo utilizziamo il secondo numero del primo gruppo. Abbiamo verificato che*

- *la diagonale che va verso sinistra ha i numeri sempre uguali*
- *nella diagonale che va verso destra i numeri aumentano di 2/10 o 2/100 o 2/1000 o 2/10000… a seconda del numero decimale utilizzato.*"

I ragazzi hanno infine osservato che il lavoro poteva continuare, come hanno detto,… all'infinito.

Conclusioni
L'attività è stata inserita nel laboratorio di approfondimento di matematica e scienze. Durante il suo svolgimento mi sono resa conto delle potenzialità che racchiude. Infatti i ragazzi hanno rafforzato numerose conoscenze e competenze; in particolare hanno potuto:

- *rivedere* caratteristiche e proprietà dei numeri razionali;
- *mettere a punto* la scrittura dei decimali;
- *comprendere* il significato di media aritmetica;
- *imparare* a fare osservazioni di diverso tipo su sequenze di numeri;
- *individuare* delle regolarità;
- *migliorare* il linguaggio specifico;
- *imparare* il corretto utilizzo dei simboli;
- *abituarsi a comunicare* nel rispetto dei tempi e delle opinioni altrui;
- *ottimizzare* la partecipazione alla lezione dialogata;
- *imparare* a "costruire" la conoscenza.

Dal canto suo, il docente impegnato in un'attività di questo tipo impara a gestire situazioni dinamiche e a cogliere le opportunità che gli si offrono, sia per esplorare nuovi contesti che per rafforzare conoscenze già possedute, per rimodulare gli argomenti, e per calibrare gli interventi per stimolare curiosità e per accrescere abilità e competenze.

---

isomorfo a quello dei numeri naturali. Ce n'è abbastanza per molte riflessioni di ricerca.

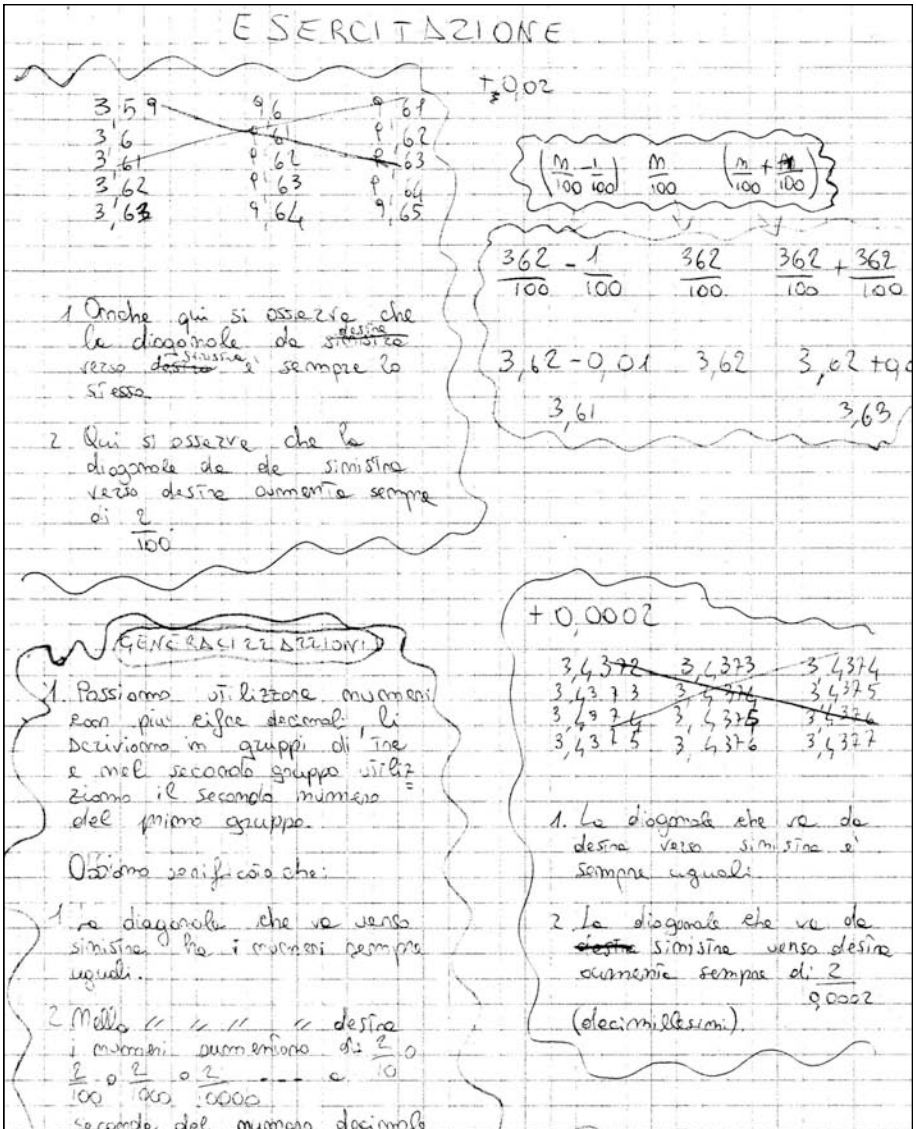

ESERCITAZIONE
+0,02
1 Anche qui si osserva che la diagonale da destra verso sinistra è sempre lo stesso.
2 Qui si osserva che la diagonale da sinistra verso destra aumenta sempre di 2/100
GENERALIZZAZIONI
1. Possiamo utilizzare numeri con più cifre decimali, li scriviamo in gruppi di tre e nel secondo gruppo utilizziamo il secondo numero del primo gruppo.
Abbiamo verificato che:
1 la diagonale che va verso sinistra ha i numeri sempre uguali.
2 Nella " " " " destra i numeri aumentano di 2/10 o 2/100 o 2/1000 o 2/10000 ... a seconda del numero decimale utilizzato.
+0,0002
1. La diagonale che va da destra verso sinistra è sempre uguali.
2 La diagonale che va da sinistra verso destra aumenta sempre di 2/0,0002 (decimillesimi).

Fig. 1.9

Infine, a riprova della efficacia del percorso effettuato, vale la pena riportare che alla fine dell'anno la classe, che come detto sopra non partiva affatto da una base particolarmente positiva, ha ottenuto i risultati migliori dell'Istituto nelle prove INVALSI.

3. Terza esperienza. Classe 1ª C, Scuola Media.

Istituto comprensivo "E. Falcetti" di Apice.
Prof. Michelino Frattolillo

Questa attività[26] ha coinvolto la classe prima C, con tutte le caratteristiche che una classe può presentare, per un totale di 18 alunni. Nel gruppo classe non sono presenti alunni svantaggiati.

Affrontare, comunque, in questo periodo dell'anno scolastico (gennaio-febbraio) i contenuti necessari per questa attività, non ha creato problemi, anche se l'approccio è avvenuto attraverso la ricerca di situazioni problematiche che hanno abituato gli alunni all'analisi delle procedure e non all'applicazione meccanica di esse.

Gli alunni sono stati divisi in due gruppi di 4 e due di 5, sia omogenei che eterogenei, per consentire di recuperare le abilità di base, di potenziare le abilità strumentali e di accrescere la socializzazione.

Nel gruppo, ogni componente ha avuto un ruolo da rispettare: moderatore, relatore ecc., ma tutti dovevano parlare a rotazione a voce bassa, rispettare ilo proprio turno d'intervento, saper ascoltare gli altri e prendere appunti.

Il linguaggio specifico e la conoscenza della terminologia appropriata, relativi alle quattro operazioni e al significato di doppio, triplo, metà, un terzo, dozzina, paia, ecc. è stato sempre fondamentale, pertanto la scelta della tematica è stata un'occasione per mettere in atto quanto affrontato fin dai primi giorni di scuola.

Le classi hanno risposto in modo propositivo al lavoro. L'idea di immaginare un caso pratico per il calcolo numerico ha coinvolto gli allievi in una lezione dialogata, con partecipazione più o meno attiva. Alcuni hanno preferito seguire con attenzione le proposte dei compagni,

---

[26] Come si vedrà, questa terza esperienza si discosta dalle altre perché la consegna di sommare numeri consecutivi viene posta solo in un secondo momento, dopo che gli alunni sono stati impegnati in un'altra attività (o "gioco") di natura aritmetica. Ciò mostra come siano tante le possibilità di utilizzo dell'attività e di inserimento della stessa nel lavoro di classe. Come già detto nell'Introduzione, la conduzione dell'esperienza è stata interamente nelle mani dell'insegnante e il suo racconto non è stato discusso insieme ad altri. Sono comunque significativi e certamente raccomandabili le modalità di tipo sociocostruttivo adottate nel lavoro, in particolare il lavoro di gruppo, la condivisione, l'attenzione alla comunicazione tra pari.

riportando calcoli e grafici sul quaderno, altri sono intervenuti facendo osservazioni pertinenti. Qualche allievo si è offerto come volontario nell'illustrare alla lavagna la sua proposta di soluzione.
Con questo problem solving la classe aveva come prerequisito la conoscenza dei numeri naturali (insieme $\mathbb{N}$).
L'uso della LIM (Lavagna Interattiva Multimediale), installata all'inizio dell'anno scolastico, e della lavagna tradizionale ha consentito di giungere alla verifica più velocemente. Interessante è stato vedere la classe discutere sulla necessità di una procedura automatica. Il protrarsi dell'attività, scelta consapevole del docente, è maturata durante tutto il periodo, poiché non mi sono sostituito agli alunni.
Da quanto esposto si capisce che le attività affrontate in modo collettivo, sotto il coordinamento dell'insegnante, la raccolta delle frasi o delle soluzioni alla lavagna, non solo quella tradizionale, ed usando frasi come "**Sì, però…**" oppure "**È sempre vero?**" ha consentito di far esprimere liberamente la loro opinione.
I ragazzi sono stati abituati a non dire mai che quanto affermato da un compagno "**È sbagliato**", ma piuttosto "**Si può fare diversamente**", "**Penso che ciò che è stato scritto presenta quell'errore** o **qualche errore**", "**Quella frase** o **quel procedimento è sempre vero?**".
Questo modo di agire ha reso più sicuri i ragazzi nel proporre altre ipotesi.

Fase 1
L'attività è stata condivisa con la classe. Sono stati illustrati gli obiettivi, i criteri di osservazione e di valutazione. I principali nodi concettuali cui fa riferimento l'attività scelta sono stati:

- Il numero e le sue proprietà: numero pari e dispari, divisori e multipli, quadrato, doppio di un numero, ecc..
- Simbolismo algebrico: calcolo letterale, l'uso delle lettere nella risoluzione dei problemi.
- Verifica e dimostrazione: cogliere le differenze linguistiche.

Punto di partenza è stato la socializzazione del gioco matematico che alcuni conoscono:

Pensa un numero, aggiungi 1, moltiplica per 2, togli 2, dividi il tutto per il numero pensato… *Si ottiene 2*

L’attività svolta da tutti gli alunni, consisteva nel risolvere il gioco, ma soprattutto nell’individuare le parole chiave che hanno un significato matematico e nell’effettuarne la traduzione corretta in linguaggio algebrico.

Fase 2
Lettura, commento e traduzione di semplici frasi, in simboli, in operazioni matematiche e successiva trasformazione in espressioni e viceversa.

Fase 3
Nella terza ed ultima fase di questa prima parte del lavoro, partendo da semplici situazioni quotidiane, sono state create tracce di problemi sempre più complessi, con conseguente trasformazione in espressioni. Le tracce proposte sono state commentate ed è stato messo in risalto, sempre dagli alunni, che queste devono essere: corte, chiare e prive di dati superflui.

Commenti ai risultati delle prime tre fasi
Fin dall’inizio, alcuni alunni hanno mostrato curiosità ed interesse, altri hanno manifestato difficoltà nella comprensione e di conseguenza non si sono lasciati coinvolgere nell’attività. Successivamente, quando è stato chiesto di formulare delle tracce tratte da situazioni quotidiane, tutti hanno contribuito all’attività. Le difficoltà iniziali, dovute alla poca conoscenza del linguaggio specifico, sono state superate allorquando ci si è appropriati della terminologia adatta. Questa sicurezza ha portato i ragazzi ad esprimere con più facilità situazioni reali. La risoluzione di problematiche più complesse ha aiutato gli alunni a prendere coscienza dei propri limiti e della necessità di un’applicazione più costante.
Il fulcro dell’attività è stato sicuramente il coinvolgimento collettivo, gestito dall’insegnante come coordinatore della discussione ‘matematica’ attorno alla situazione-problema. La raccolta delle ipotesi di soluzione, visibile a tutti sulla LIM o sulla lavagna tradizionale, e la successiva discussione, è stata fatta con estrema disponibilità, senza valorizzarne una in particolare oppure stroncarne una non corretta. Tutte le ipotesi dei ragazzi sono state rigorosamente raccolte e messe al vaglio da loro stessi, per verificarne la correttezza o meno. Si è verificato magari che il sostenitore di un’ipotesi la difenda accanitamente, con motivazioni più o meno ragionevoli.

Il mio ruolo nella discussione è stato quello di riportarla sempre su un piano logico, promuovendo l'argomentazione a favore di una congettura o contro di essa: in tal modo si abituano i ragazzi a non abbracciare un'ipotesi sulla base dell'autorità che può esercitare il compagno che l'ha formulata, o di fattori affettivi o irrazionali, o ancora di motivazioni di tipo qualitativo. Occorre spingere verso un'argomentazione che giustifichi un'ipotesi con un ragionamento sorretto non solo da motivazioni logiche, ma anche da calcoli sui dati.

Fase 4

Alla fine di questo lavoro è stato posto il quesito:

Consideriamo più terne di tre numeri consecutivi, sommiamoli ed analizziamo i risultati

Alla lavagna sono state scritte le diverse terne elaborate da ogni gruppo e un componente ne ha analizzato i risultati, successivamente è stata analizzata ogni singola tabella.
Di seguito sono riportate le quattro tabelle, scritte ciascuna fino alla quarta terna:

1 + 2 + 3 = 6	2 + 3 + 4 = 9	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 = 6
2 + 3 + 4 = 9	4 + 5 + 6 = 15	4 + 5 + 6 = 15	3 + 4 + 5 = 12
3 + 4 + 5 = 12	6 + 7 + 8 = 21	7 + 8 + 9 = 24	7 + 8 + 9 = 24
4 + 5 + 6 = 15	8 + 9 + 10 = 27	10 + 11 + 12 = 33	4 + 5 + 6 = 15

Le considerazioni sulla **prima tabella** sono state che:

a) Se gli addendi di una terna sono due dispari ed uno pari, la somma è pari, mentre se sommiamo due pari ed uno dispari la somma è dispari.
b) La somma di ogni terna è un multiplo di 3.
c) Se si moltiplica il numero centrale per 3, il prodotto è uguale alla somma della terna.
d) Dividendo per 3 la somma di ogni terna si ottiene il numero centrale.
e) Se sommiamo il primo ed il terzo addendo e dividiamo il risultato per 2 otteniamo quello centrale.
f) Se sommiamo i primi 3 addendi della colonna, il risultato è la somma della prima terna considerata.

g) Se sommiamo i primi 3 addendi della colonna centrale, il risultato è la somma della seconda terna considerata.
h) Se sommiamo i primi 3 addendi della terza colonna, il risultato è la somma della terza terna considerata.
i) Se sommiamo gli addendi in diagonale, da sinistra a destra e da destra a sinistra, di tre terne consecutive, otteniamo la somma della riga centrale.
j) Se sommiamo gli ultimi due addendi di una riga con il terzo della riga successiva otteniamo la somma di questa seconda riga.
k) I termini in diagonale da sinistra a destra aumentano di 2 in 2, mentre da destra a sinistra sono uguali.
l) La somma di tutti gli addendi delle prime due terne ha come risultato la somma della quarta terna.

Le considerazioni sulla **seconda tabella** sono state che permangono le stesse proprietà della prima elencate ai punti: a), b), c), d), e), g), i), a cui bisogna aggiungere che:
a) Se sommiamo gli ultimi due addendi di una riga con il terzo della terza terna otteniamo la somma della seconda riga.[27]
b) I termini in diagonale da sinistra a destra aumentano di 3 in 3, mentre da destra a sinistra sono consecutivi.

[27] Le proprietà mano a mano diventano sempre più difficili da esprimersi. Si può immaginare lo sforzo dei ragazzi per riuscire a dirle (e quindi la valenza didattica, anche relativa all'apprendimento della lingua italiana, di questa fase del lavoro), sforzo testimoniato anche dalla sintesi operata dall'insegnante. A queste difficoltà, che inevitabilmente compaiono quando si usa la lingua naturale (l'italiano) per descrivere situazioni ingarbugliate, viene in soccorso il linguaggio algebrico, che piano piano (piano piano!, e con la mediazione dell'insegnante) si impone per la sua più efficace capacità di esprimere le proprietà in gioco. E la scoperta – entusiasmante (anche se non facile e non è un caso infatti che nel nostro racconto non ve ne è traccia) – sarebbe che non appena si riesce correttamente ad usare le lettere, in un solo colpo si esprime una proprietà, se ne capisce la ragione e se ne dimostra la validità generale. Vediamolo proprio su questo esempio. Nella seconda tabella alla prima riga sono riportati i tre numeri 2, 3 e 4, alla seconda riga 4, 5 e 6, e quindi alla riga n-esima, per un qualunque numero naturale n, vi saranno i numeri $2n$, $2n + 1$, $2n + 2$. (Questa elaborazione peraltro è stata ricavata in classe, come viene detto più in basso). Se considero anche le due righe successive a questa, in esse compariranno i tre numeri $2n + 2$, $2n + 3$, $2n + 4$ e i tre numeri $2n + 4$, $2n + 5$, $2n + 6$. Che cosa dice la proprietà m)? Devo sommare gli ultimi due addendi della prima di queste tre righe con l'ultimo della terza: dunque $(2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 6)$. E quanto si ottiene? Si ottiene $6n + 9$. Poi devo vedere quanto vale la somma dei tre addendi della seconda riga: $(2n + 2) + (2n + 3) + (2n + 4)$, cioè di nuovo $6n + 9$. Ecco dunque accertata la validità **generale** della regolarità osservata!

c) Le varie somme aumentano costantentemente, con la differenza tra ciascuna somma e la precedente sempre uguale a 6.
d) Le considerazioni sulla **terza tabella** sono state che permangono le stesse proprietà della prima elencate ai punti: a), b), c), d), e), g), i), a cui bisogna aggiungere che:
e) Le varie somme aumentano costantentemente, con la differenza tra ciascuna somma e la precedente sempre uguale a 9.
f) I termini in diagonale da sinistra a destra aumentano di 4 in 4, mentre da destra a sinistra aumentano di 2 in 2.

A questo punto è stato chiesto di generalizzare i risultati delle prime tre tabelle:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

$$2n + (2n + 1) + (2n + 2) = 2n + 2n + 1 + 2n + 2 = 6n + 3 = 3(2n + 1)$$

$$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Dalla discussione è emerso che la formula generalizzata per calcolare la somma di una terna con addendi consecutivi è la stessa nella **prima** (addendi consecutivi in colonna) e nella **terza** tabella (addendi che in colonna distano di 3 l'uno dall'altro), mentre nella **seconda** tabella si considerano pari gli addendi della prima colonna. Nella **quarta** tabella non è possibile fare considerazioni particolari perché le terne non sono state poste secondo un criterio.[28]
Un alunno, a questo punto, ha chiesto che cosa accade se la prima terna nelle tabelle parte da 0. Per rispondere a questa domanda, è stata

[28] Sembra qui un po' un peccato non sfruttare la specificità di quanto elaborato dal quarto gruppo di studenti. Il fatto di non aver "messo in ordine" le terne, come fatto dagli altri tre gruppi può essere visto infatti non come un "difetto" (nel senso che qui mancano alcune delle proprietà che si osservano per le prime tre tabelle), ma come un "pregio": in questo caso si possono osservare solo le proprietà che dipendono esclusivamente dal sommare tre numeri consecutivi (per inciso quello che nella prima esperienza è chiamato "lavoro verticale"). Nel nostro caso si potrebbe ad esempio osservare che le proprietà comuni a tutte e quattro le tabelle sono quelle indicate ai punti a), b), c), d), e), e quindi riflettere sul fatto che queste sono le proprietà che non dipendono dall'ordine con cui sono elencate le terne – potremmo forse spingerci a dire che sono le più importanti – mentre tutte le altre sono meno generali. È anche interessante approfondire il ruolo delle proprietà g) ed i) che sono valide nelle prime tre tabelle e non nella quarta.

aggiunta su tutte le tabelle una terna che aveva come primo numero lo zero. Ogni gruppo ha analizzato questa nuova situazione e le conclusioni sono state di nuovo discusse.

0 + 1 + 2 = 3	0 + 1 + 2 = 3	0 + 1 + 2 = 3	0 + 1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6	2 + 3 + 4 = 9	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 = 6
2 + 3 + 4 = 9	4 + 5 + 6 = 15	4 + 5 + 6 = 15	3 + 4 + 5 = 12
3 + 4 + 5 = 12	6 + 7 + 8 = 21	7 + 8 + 9 = 24	7 + 8 + 9 = 24
4 + 5 + 6 = 15	8 + 9 + 10 = 27	10 + 11 + 12 = 33	4 + 5 + 6 = 15

È stato accertato che solo nella **prima** e nella **seconda** tabella le considerazioni fatte precedentemente continuano a valere, nella **terza** si perde la regolarità della differenza pari a 3 dei termini di due terne successive e nella **quarta** l'inserimento della nuova terna non ha alcuna influenza perché le terne sono state scritte senza nessun ordine in seno alle colonne.
Quando è stata generalizzata la somma, con ***n*** è stato indicato il numero centrale, per cui cambia la formula. Dopo un'accurata discussione si è concluso che:

$$(n - 1) + n + (n + 1) \;=\; n - \cancel{1} + n + n + \cancel{1} \;=\; 3n$$

Successivamente è stata posta la domanda:

Come si comporta la somma di più terne con tre addendi consecutivi pari? E con tre addendi consecutivi dispari?

I gruppi si sono scatenati, facendo tesoro dell'esperienza precedente.[29]

[29] L'attività a un certo punto si interrompe, probabilmente per la necessità di svolgere altri argomenti o anche per l'affievolirsi o l'esaurirsi dell'interesse verso altre scoperte o altre considerazioni. Anche da un punto di vista "teorico" non è necessario che si arrivi per forza ad un prefissato obiettivo finale, per varie ragioni. La prima è che non è detto che si possa o debba identificare una conclusione, in quanto potenzialmente si può estendere l'attività a includere sempre nuovi argomenti e sempre più difficili. Per esempio qualcuno avrà forse riconosciuto che quelle che si vengono a formare sono delle progressioni e si potrebbe lavorare in tal senso. In secondo luogo l'attività o gli argomenti con essa affrontati possono essere ripresi in un altro momento anche a distanza di tempo. Tuttavia è anche opportuno che di volta in volta il docente cerchi di fare il punto con i propri studenti su dove si è arrivati, quali sono le scoperte fatte, le conoscenze condivise, le parole e le frasi acquisite e così via.

4. Qualche commento conclusivo

In questo ultimo paragrafo aggiungeremo ancora qualche considerazione, sia riprendendo alcuni commenti inseriti nelle note ai paragrafi precedenti sia sviluppando un paio di questioni di matematica, solo accennate nelle esperienze di classe riportate sopra. Le varie cose a cui si presta l'attività sui numeri consecutivi, elencate nell'Introduzione, come si è visto non sono tutte presenti in ciascuna esperienza, né potrebbe essere altrimenti. In particolare non sono sviluppate possibili e significative attività legate al dimostrare. I due ultimi punti che seguono dovrebbero così suggerire come utilizzare l'attività per scopi ulteriori rispetto a quelli già documentati.

4.1 Sulla dimostrazione

Se non si vuole che la frase "La matematica aiuta a ragionare" sia un puro modo di dire senza contenuto reale, bisogna cercare, rimboccandosi le maniche, di capire come si può dare sostanza a quest'affermazione a tutti i livelli di età. Certo i libri di testo non aiutano, e nemmeno la lettura dei vari argomenti presenti nei programmi presi ad uno ad uno. Ma nelle indicazioni che accompagnano i programmi e in tutti i documenti ufficiali, e in tutte le guide serie, si ribadisce in continuazione che è necessario dedicare molto tempo e grande energia a questo obiettivo: educare al ragionamento e all'argomentazione.
Ora quando in matematica si parla di dimostrazioni, si pensa di solito alla geometria e in particolare a quella che si insegna nel primo biennio dei licei. E inoltre il tipico modo con cui si affrontano le dimostrazioni è quello di presentarle come sono sui libri, già confezionate, depurate di ogni elemento estraneo o ridondante, espresse in forma raffinata anche dal punto di vista linguistico. E i ragazzi sono invitati quasi soltanto a saper ripetere correttamente quegli argomenti.
Ebbene, queste modalità non sono affatto le migliori per affrontare la questione a scuola, e soprattutto non servono allo scopo di sviluppare intelligenza e spirito critico nei nostri alunni. Invece, come dicono ormai tutti i documenti ufficiali, la dimostrazione "formale" in matematica deve essere vista come il punto di arrivo di un lungo processo che parte dalla scuola primaria se non da quella dell'infanzia e che si sviluppa attraverso un'incessante attività di tentativi, errori e discussioni di ogni tipo, e su qualunque argomento. Anzi l'aritmetica è considerato uno dei domini elettivi in cui promuovere il ragionamento.
Il tipico ciclo da attivare è quello di "osservazione, produzione di ipotesi, ricerca di conferme o smentite, confronto fra diversi punti di vista, e

infine dimostrazione". L'aritmetica è un ottimo territorio in cui lavorare, perché essendo i numeri infiniti, nessuna verifica condotta su un certo numero di casi potrà dirsi conclusiva. Ed è anzi necessario chiarire quanto prima che verificare e dimostrare sono due cose assai diverse. Nelle attività sulle terne consecutive i ragazzi fanno un gran numero di verifiche, ma forse solo in un caso, e stranamente ciò accade con i bambini di seconda elementare, assistiamo ad una vera e propria dimostrazione.

Prendiamo una fra le cose osservate, per esempio che *la somma di tre numeri naturali consecutivi è il triplo del numero centrale*, e proviamo ad analizzare il processo con cui quest'affermazione ci appare sicura. Si possono distinguere varie tappe, anche se ciò non significa affatto che esse si susseguono rigidamente in un certo ordine: tutt'altro! In primo luogo occorre avere sicurezza su quello che significa triplo e su come si riconosce che un numero è il triplo di un altro. Nel lavoro in seconda elementare una parte significativa del lavoro è proprio finalizzato a raggiungere questo obiettivo. Poi occorrerà fare un po' di verifiche e vedere se la proprietà in questione è soddisfatta in tutti i casi che andiamo ad esaminare. Questa parte è fondamentale ed è qui che nasce di norma anche l'idea del perché la proprietà vale. Peraltro la sequenza delle verifiche che si effettuano non è quasi mai completamente casuale ma si costruisce secondo una strategia più o meno implicita che può essere di enorme utilità rendere esplicita. Dunque ci si chiede perché la proprietà vale. Può darsi, e anzi accade spesso, che tutto questo avvenga senza che ci se ne renda conto, per cui alla conclusione si arriva per intuito.

La strategia del ricorso all'intuizione per noi esseri umani è fondamentale e spesso più che affidabile, e va quindi incoraggiata. Ma è altrettanto vero che l'intuizione a volte ci inganna e che molti progressi nella conoscenza sono stati ottenuti proprio mettendo in dubbio le conclusioni intuitive. Ma per essere nelle condizioni di controllare la validità di un'intuizione, la prima cosa da fare è dare ad essa una formulazione esplicita, anche per poter comunicare e confrontarsi adeguatamente con gli altri. Compito fondamentale per l'insegnante è dunque quello di favorire questa evoluzione di ciò che è implicitamente magari già chiaro verso una forma che sia comunicabile e "trattabile", cioè suscettibile di essere riguardata da varie parti, trasformata, manipolata. Un esempio di ciò è contenuto nella figura 4. Qui i bambini usano due diversi registri linguistici per illustrare la ragione della proprietà in gioco, il primo è la lingua italiana, quando scrivono "Se togliamo una unità all'ultima cifra e la diamo alla prima otteniamo tre numeri uguali"; il secondo è il registro grafico nel disegno dei regoli che si scambiano.

L'illustrazione serrata, convincente e generale del perché una proprietà vale è la sua "dimostrazione", e dunque qui i bambini, con la guida dell'insegnante, costruiscono ben due diverse dimostrazioni della proprietà. Naturalmente nella figura 4 si vede solo il passaggio principale della dimostrazione, ma ciò non sminuisce affatto la sua straordinaria importanza.

Bene, per le proprietà dei numeri, oltre ai due registri linguistici usati dai bimbi, ce n'è un terzo assai più efficace e potente, ed è il linguaggio algebrico. È così potente che, in un caso come quello esaminato, la dimostrazione della proprietà in gioco viene, diciamo così, in automatico appena si adotta il linguaggio, al punto che quasi non ce ne si accorge. La dimostrazione è contenuta nell'uguaglianza

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

o ancora meglio nell'altra

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n,$$

che non a caso sono tranquillamente presenti negli elaborati dei ragazzi di scuola media, sia nella seconda che nella terza esperienza. E basta "leggere" quello che c'è scritto in queste formule per rendersi conto che esse nient'altro sono che la "traduzione" in linguaggio algebrico di quello che i bambini di seconda elementare dicono a parole o col disegno. Senonché nei resoconti manca la consapevolezza del potenziale di queste formule, manca l'idea che un loro utilizzo, che tenga conto dei significati, ci fornisce uno strumento, come si diceva, di straordinaria potenza.

Sarebbe infatti possibile partire da questa acquisizione per andare a mettere alla prova tale strumento nel controllo di tutte le altre proprietà trovate dai ragazzi. Ma ci rendiamo conto che qui il discorso potrebbe allungarsi senza fine, e può essere questo dunque un punto su cui invece fermarsi.

4.2 Sul significato della parola consecutivo/i. *E sull'importanza (e la provvisorietà) delle definizioni.*

Che cosa significa che due numeri sono consecutivi? Potrebbe sembrare una domanda oziosa: probabilmente è a tutti intuitivamente chiaro il significato di questa parola; dopo tutto è scritto nel titolo di questo capitolo, ne abbiamo parlato fino a questo punto senza esitazioni, in tutta la prima esperienza pare proprio che sia a tutti chiaro. Eppure una delle modalità con cui si procede nella conoscenza e la si affina sempre di più, e segnatamente in matematica, è proprio quella di provare a esplicitare quello che a prima vista sembra scontato. Bene, viene subito da dire che due numeri sono consecutivi se la loro differenza è 1. Già, in fondo è proprio sulla base di questa "definizione" che abbiamo potuto indicare con n ed $n + 1$ due generici numeri consecutivi. Ed è questa anche un'ottima occasione per riflettere sul fatto che l'importanza delle "definizioni", una delle cose che caratterizzano la matematica, sta proprio nella circostanza che, una volta acquisita una definizione, essa ci consente di scoprire meglio e anche convalidare o dimostrare le principali proprietà delle cose di cui parliamo. Nel nostro caso, ad esempio, le innumerevoli proprietà delle terne di numeri consecutivi.

Ma qui vogliamo provare ad andare ancora più in profondità. E la considerazione di terne di numeri consecutivi pari e dispari tende infatti a sparigliare le carte. Di nuovo, non è difficile capire intuitivamente quando due numeri pari (o dispari) sono consecutivi, e in fondo si arriva anche abbastanza in fretta a comprendere che in questo caso la loro differenza è 2: n ed $n + 2$. Ma già si comincia a fare strada – e come sempre l'insegnante può suggerire in modo sapiente e discreto questi dubbi, in vista di nuove più avanzate, ma sempre provvisorie certezze, – l'idea che la definizione di prima deve essere modificata, o meglio a rendersi conto che essa ha una validità limitata all'insieme di tutti i numeri naturali.

Il discorso diventa ancora più problematico quando si passa ai numeri razionali. Che vuol dire che due numeri razionali sono consecutivi? Qui la scoperta è sconvolgente, ed è insieme matematica e linguistica. Il fatto è che i numeri razionali costituiscono, come si dice, un insieme ordinato denso, che significa che fra due qualunque numeri razionali ce n'è sempre almeno un altro e quindi infiniti altri; di conseguenza trovare due numeri razionali consecutivi è impossibile, se per consecutivi intendiamo due numeri fra i quali non ce ne sono altri. Abbiamo dunque in un sol colpo: a) una proprietà tutt'altro che banale dei numeri razionali, sulla quale non sarà certo tempo sprecato quello che in altre occasioni si vorrà e potrà dedicare a capirla meglio e a cercarne altre conseguenze; b) una diversa e nuova accezione della parola "consecutivi": "due numeri fra i quali non ce ne sono altri". Non è un caso, dando ascolto a Vygotskij (*Pensiero e linguaggio*), che due questioni, una disciplinare e una linguistica, vanno di pari passo. Come detto, le questioni non sono semplici, ma, come in fondo prova anche la veloce esplorazione condotta nell'ambito dell'esperienza n. 2, niente affatto fuori della portata dei nostri ragazzi. Si intende che si può e si deve procedere per gradi. E infatti vediamo un esempio di questo percorso per gradi nelle cose che si dicono parlando dei numeri decimali, dove il significato di "numeri consecutivi" si conserva finché si tratta con decimali di un certo tipo, ma intanto deve essere assoggettato a continue modifiche e aggiustamenti, fino a che è destinato a perdersi.

Ancora una riflessione. Nell'ultimo significato dato a *consecutivi*, cioè "due numeri fra i quali non ce ne sono altri", non vi è più traccia dell'addizione, quella che ci aveva consentito di rappresentare con n ed $n + 1$ all'inizio i due numeri, e poi ancora quelli pari, alcuni dei decimali e così via. Forse siamo pronti ad un altro salto concettuale, cioè a renderci conto che il termine *consecutivi* non riguarda solo i numeri (che sono cose che si sommano) ma anche altre specie di oggetti, purché *si susseguano* (costituiscano quello che in matematica si chiama **un insieme ordinato**): per esempio i mesi dell'anno, o i sette re di Roma o i colori dell'arcobaleno. È naturale ad esempio dire che Marzo e Aprile sono consecutivi, ma non ha senso dire che "la loro differenza è 1". Dunque il significato del termine "consecutivi" è molto generale, e poi, caso per caso, lo si può caratterizzare in modi specifici. Fra i numeri naturali ad esempio, ma solo fra essi, ***è equivalente dire*** che <u>due numeri sono consecutivi</u> e che <u>la loro differenza è 1</u>. In altre parole *essere consecutivi* e *avere differenza 1* sono due proprietà distinte, che, guarda caso, coincidono quando si ha a che fare con i numeri naturali.

Appurato questo, possiamo prendere la direzione che vogliamo. Per esempio, una volta capito che tra i numeri naturali una successione di numeri consecutivi dà luogo a numeri che crescono di 1 in 1, potrebbe essere interessante esaminare che cosa succede se prendiamo successioni di numeri che crescono di 2 in 2, di 3 in 3, e così via. E poi perchè prendere per forza numeri naturali? Possiamo vedere che succede a successioni di numeri di qualunque tipo in cui ogni numero si ottiene dal precedente aumentandolo di 1, o di 2, o anche di una quantità d non intera. Certo, non sono più numeri consecutivi, ma che importa? Sono altre cose, altrettanto interessanti, con vecchie o nuove proprietà. Ecco, così facendo abbiamo costruito le progressioni aritmetiche!

Capitolo II – Prime Forze: schemi per guidare l'inizio di un percorso di comprensione

Lavori di S. Califano, E. Cocchiarella, M. De Pietro, A. Palma, M. M. Pascarella, M. G. Vallarelli
Gruppo coordinato da P. Guidoni

Premessa

a) Spesso nell'avvicinarsi (nell'avviare altri) a una riflessione sul *pensiero fisico* (pensiero, comune e scientifico, sulla "fisicità" del mondo) se ne sottolineano due aspetti "metacognitivi": da un lato i pericoli di comprensione che si correrebbero nel riferire i concetti-base della fisica come disciplina all'esperienza corporea (in senso lato), e/o quotidiana; dall'altro la corrispondente discontinuità che dovrebbe sempre separare gli abiti cognitivi "comuni" , inevitabilmente caratterizzati da "misconcezioni", da quelli specificamente "scientifici" , unici ad essere concettualmente corretti. (A questo proposito basta ricordare il contrasto, vivo e problematico da Parmenide in poi nella nostra cultura, fra *doxa*/opinione ed *epìsteme*/conoscenza-vera).
Il modello cognitivo che è stato elaborato attraverso la ricerca nelle classi <u>insieme</u> a una varietà di percorsi di presentazione-approccio disciplinare, fra cui quello schematizzato di seguito, si basa su (e verifica) ipotesi esattamente opposte: affinché la proposta di graduale mediazione fra conoscenza individuale e cultura specialistica abbia successo a scuola occorre che quello che via via si capisce/impara parta sempre (ad ogni età) dalla base di esperienza il più larga possibile (a cominciare dunque da quella corporea e quotidiana), e vi sia sempre e sistematicamente riferito; e che lo sviluppo (individuale e socializzato, a scuola) di un capire/sapere che è sempre nuovo, in quanto sempre più "potente" e più "competente", avvenga in riconoscibile (riconosciuta) continuità con quello che ad ogni livello già si sa e già si capisce. A cominciare da quel *sapere/capire naturale*, inerente al fatto stesso di essere integrati in una comunità umana, che è a sua volta in continua evoluzione (storica) e in continuo sviluppo (individuale).

b) Come sottolineato fin dal titolo, quelli che seguono sono solo <u>schemi</u> riassuntivi di un percorso concettuale validato dalla ricerca che è arrivato a essere largamente *risonante* con le potenzialità cognitive generalmente umane – e che quindi può essere "aggiustato" con successo alle situazioni cognitive più diverse, a partire dalla scuola dell'infanzia: ovviamente con opportuni sviluppi nei modi di *formalizzazione* (dalla lingua naturale a diversi aspetti della matematica) e quindi nei criteri di *rappresentazione*, ma senza vere discontinuità concettuali fino all'inizio dell'università. Gli schemi stessi, d'altra parte, in quanto si riferiscono ad aspetti quasi sempre simultanei (e comunque correlati) di ogni fare-forza, non possono dar luogo di per sé a proposte concrete di percorsi o itinerari didattici. Queste devono essere piuttosto ri-elaborate sulla base di una contestualizzazione progressiva degli schemi stessi (in relazione all'esperienza e all'età): sempre a partire da un nucleo pù "centrale", ma senza cedere alla tentazione di confondere/scambiare un *percorso* di comprensione con un apprendimento sequenziale e mnemonico di "regole" definite. (Riguardo poi all'uso della parola e della nozione stessa di "regole", quando ci si riferisca alla prima apprensione di *aspetti invarianti di situazioni varianti* in ambito fisico e/o matematico, si rinvia alle brevi osservazioni presenti nel capitolo *Introduzione*).

c) Come già notato nella stessa *Introduzione*, gli schemi che seguono (nelle loro specificazioni verbali e rappresentazioni figurali) non vogliono/possono dunque costituire né la documentazione né la giustificazione esplicita di un percorso didattico innovativo attraverso cui introdurre i concetti base del fare-forza (percorso che è, del resto, abbastanza diverso da quelli tradizionali riportati nei libri di testo di vario livello) : a questo scopo occorrerebbe probabilmente fare riferimento a una esposizione più distesa, in corso di preparazione. Presentando, malgrado tutto, gli schemi stessi in questa forma "sincopata" si hanno in mente due scopi (oltre quello, ovvio, di promemoria per chi ha partecipato al lavoro di questi anni, e ne ha trovato applicazione nei contesti di esperienza più diversi). In primo luogo si vuole dare un'idea della *complessità concettuale*, che pure è sempre collegata strettamente all'*accessibilità operativa*, che è comunque necessario affrontare per porre solide basi cognitive ai percorsi di crescita culturale, se li si vogliono sicuri e produttivi a lungo termine. D'altra parte si vuole offrire la possibilità, anche a chi non ha partecipato al nostro lungo *contrappunto fra modi di guardare diversi* (degli esperti, degli adulti in quanto persone e in quanto insegnanti, dei bambini e dei ragazzi), di confrontarsi con un *campo di esperienza e conoscenza* che implicitamente ma potentemente *mette in forma* fin dalla nascita i modi di vivere e i modi di pensare umani. E poi, dopotutto, non dovrebbe essere difficile, partendo dal complesso degli schemi, ri-costruire con un po' di pazienza e divertimento una varietà di aspetti dell'esperienza di vita di ognuno: fino a raccordarla, attraverso gli stessi schemi, a quei "principi della meccanica" la cui forma libresca troppo spesso (come notato dagli insegnanti stessi, "sulla propria pelle") agisce da efficace deterrente nei confronti di una vera comprensione – e di un vero interesse.

I) Regole per le forze statiche

Ia) L'idea di partire dall'analisi di **situazioni statiche** (o molto lentamente variabili) è in sostanza legata al fatto che se niente si muove è (percettivamente, innanzitutto) più facile analizzare i diversi aspetti delle interazioni. D'altra parte ad ogni età, e fin dall'inizio di ogni percorso di analisi dei fare-forza concreti, vengono facilmente evocate le infinite situazioni di vita comune in cui il fare-forza è legato a un movimento: queste situazioni non devono essere comunque eluse apriori, data la loro importanza percettiva e concettuale, ma piuttosto memorizzate sotto forma di problemi aperti per poter essere riprese in un secondo tempo: in attesa cioè di essere a loro volta organizzate secondo "regole" che si riveleranno totalmente analoghe a quelle rilevate in situazioni statiche, e in quanto tali più facilmente riconosciute come "evidenti".
In ogni caso è essenziale tenere presente (far notare) attraverso tutto il percorso che **le diverse_"regole" del fare-forza**, anche se rilevate o "scoperte" gradualmente in situazioni-prototipo semplificate, **sono sempre valide tutte e contemporaneamente** in ogni possibile situazione di esperienza. Nelle situazioni scelte o costruite come particolarmente "semplici", infatti, alcune delle regole possono essere meno evidenti di altre, che in questo modo di volta in volta risaltano più direttamente all'attenzione.

Ib) La nozione di **corpo** (in tutta la sua complessità), cruciale dal punto di vista fisico, è assunta all'inizio nel suo significato letterale, con il suo carico di esperienza diretta e condivisa (biologica, percettiva, psicologica); per essere poi subito, gradualmente, estesa a comprendere per analogia qualunque **sistema** fisico (animato o inanimato, facilmente sensibile come un oggetto o solo problematicamente evidente come un "campo") nella varietà delle sua possibili identificazioni materiali (figura 1). In questo modo è possibile imparare (accorgersi) che è possibile "rispecchiare" le une nelle altre caratteristiche sia del proprio corpo, sia degli oggetti più o meno "concreti" o "astratti", guardati e visti nei loro modi di fare-forza.

Ic) Non "esistono" in natura **forze** in quanto enti isolati: la nozione (il fatto fisico) di base a cui si riferiscono *esperienza linguaggio e conoscenza* è piuttosto la situazione (lo stato) di **fare-forza** da parte di un dato sistema, che così mette in gioco allo stesso tempo e in modo correlato le sue strutture interne (le sue **intra-azioni,** si potrebbe dire, di ogni tipo) e le sue **inter-azioni** con l'esterno (con altri sistemi in grado di fare-forza).

Id) L'esperienza elementare che coinvolge sistemi-corpo e sistemi-oggetto ci guida a *congetturare* **due caratteristiche fondamentali e simultanee di ogni fare-forza:** caratteristiche che ne definiscono i comportamenti (e che, come vedremo, sono valide anche in situazioni di movimento):

-Id1- Nel fare forza verso il suo esterno in (attraverso) una regione definita del suo contorno-confine, un **sistema-oggetto A** ha sempre bisogno di (è vincolato a) un **sistema antagonista B** che sia in grado di **fare-forza-contro** (verso l'interno di A) nella stessa, comune regione di confine. I due fare-forza appaiono inoltre sempre reciprocamente **vincolati** anche in direzione verso e intensità (apprezzata qualitativamente, al variare correlato in ambedue i sistemi). In altre parole i reciproci fare-forza dei due sistemi possono essere descritti (con una analogia di origine chiaramente antropomorfa) in termini di **due "azioni" uguali e opposte**; e quindi possono essere rappresentati attraverso entità astratte ("**forze"**) che "fissano" mentalmente e simbolicamente le azioni stesse, mettendo in evidenza i loro aspetti specifici e (già percettivamente) rilevanti: l'**intensità** globale, la **direzione** e il **verso** (figura 2).

-Id2- Nel suo fare-forza un sistema-oggetto ha sempre bisogno di (è sempre vincolato ad) interagire con l'esterno attraverso **almeno due diverse regioni** del suo contorno: cioè ad "esercitare **almeno due distinte forze**" (nel linguaggio appena introdotto) che di nuovo nei casi più semplici appaiono essere qualitativamente **correlate in intensità e direzione ed opposte in verso**. (figura 3). (Data la simultaneità delle regole, in ciascuna delle due regioni il sistema dovrà avere un antagonista).

Anche in questo caso a situazioni percettivamente inequivocabili (per allungare un elastico… figura 4) se ne affiancano molte altre decisamente più ambigue per la diversità e molteplicità dei sistemi che possono essere in gioco (cfr più avanti). Ed è importante tenere presente che proprio la confusione (la mancata chiarificazione) di questo <u>doppio</u> aspetto dell'interazione può essere la causa prima di una molteplicità di fraintendimenti.

Ie) E' importante a questo punto ricordare che si stanno analizzando *situazioni statiche*, in cui cioè esistono **diversi fare-forza** che in qualche modo "**si compensano a vicenda**" nell'impedire qualunque forma di movimento dei sistemi coinvolti: situazioni che esperienza linguaggio e conoscenza "naturali" da sempre definiscono di "**equilibrio**". L'atteggiamento cognitivo cruciale che permette di caratterizzare l'interazione è dunque quello di riconoscere un **vincolo assoluto, interno ed esterno, di sostanziale simmetria** nei sistemi interagenti (per la "dissimmetrizzazione" concettuale dell'interazione cfr più avanti): nozione talmente forte da essere associata linguisticamente (antropomorficamente) a quella di "finalità". Così se un sistema A "spinge" verso il suo esterno, tendendo a espandersi, anche l'antagonista B lo "deve" fare da parte sua, di necessità attraverso un fare-forza in verso opposto e con adeguata intensità, "**per** mantenere l'equilibrio"; se un sistema A "tira" B verso il suo esterno, tendendo a contrarsi, anche B tenderà a contrarsi "**per** equilibrare l'azione" di A …, e così via) (figura 5). Il modo più semplice di raffigurare graficamente un fare-forza è quindi proprio quello (già intuitivo) di una "freccia", che ha la direzione e il verso della cosiddetta "azione", e una lunghezza che è considerata come (qualitativamente) proporzionale alla sua intensità (a priori indeterminata quantitativamente). In questo modo viene riconosciuto/attribuito al fare-forza reciproco di due sistemi un vincolo causale "universale", che al tempo stesso costituisce una analogia-metafora fondante usata in ogni sistema cognitivo (umano ma probabilmente anche animale).

If) D'altra parte l'esperienza stessa può in molte situazioni "oscurare" l'universalità di questo (doppio) vincolo, in particolare in situazioni in cui si verifichi almeno una di queste condizioni:

-If1- Uno dei due sistemi interagenti non "esibisce" all'esterno la sua condizione-stato di fare-forza. (Se tiro un elastico, *mi accorgo* <u>sia</u> che faccio-forza da due lati con il mio corpo, <u>sia</u> che l'elastico a sua volta mi fa-forza contro: e questa sua condizione è "esibita" dalla sua deformazione. Se cerco di comprimere un blocco rigido, mentre percepisco sul mio corpo la sua contro-forza non noto alcuna modifica nel suo stato).

-If2- Uno dei due sistemi è un "**sistema di riferimento**", un sistema cioè che costituisce in qualche modo il "**contorno fisico inalterabile**" di un ambiente in-relazione-a-cui si osservano posizioni e movimenti <u>e</u> si svolgono le azioni di fare-forza. (Pavimento e pareti di una stanza costituiscono il sistema di riferimento più ovvio, “contro” cui può essere per esempio “schiacciato” un sistema-oggetto; un tavolo rigido o una pesante cassa rigida appoggiata sul pavimento possono modificarlo localmente; mentre è ovvio che ogni sistema di riferimento resta tale solo entro certi limiti del fare-forza) (figura 6).

Ig) Ancora una generalizzazione dell’esperienza: “**per**” **potere fare-forza** un sistema “deve” essere **de-formato** rispetto al suo stato di “**equilibrio naturale**” (lo stato cioè in cui si trova quando non fa-forza in nessun modo). C’è qui un doppio nodo concettuale, cruciale per tutta l’interpretazione fisica. Da un lato un principio generale di **causalità**, che lega fra loro indissolubilmente i *modi di essere* dei sistemi ai loro *modi di interagire*, attraverso tutti i loro cambiamenti. Da un altro, un’idea generalizzata di “**forma**”, intesa come specificazione particolareggiata dello “stato” di un sistema, cioè del suo modo di essere. E un cambiamento di “forma”, una de-formazione, in relazione a un fare-forza può verificarsi nei modi più diversi – <u>sempre</u> nella struttura interna (anche se non direttamente accessibile all’evidenza), <u>spesso</u> nella configurazione spaziale e/o in altre proprietà accessibili dall’esterno. (E in quanto de-formato dall’interazione rispetto al suo stato “naturale” un sistema-oggetto avrà comunque acquistato “energia” – cfr. più avanti, secondo modalità correlate alla storia del suo fare-forza). Anche in questo caso l’esperienza è variegata: il corpo umano o una ruspa possono fare più o meno forza anche indipendentemente dalla loro configurazione spaziale - in un elastico il fare-forza e la forma spaziale sono strettamente correlati - un oggetto “rigido” può fare-forza deformandosi pochissimo, anche sotto il limite della nostra percezione spaziale… etc.

Ih) Fa parte dell’esperienza primaria la consapevolezza che **il fare-forza è** generalmente **variabile e graduabile con continuità**; e la stessa esperienza primaria “mescola” spesso due aspetti del fare-forza corporeo – la percezione interna di “sforzo” e la percezione esterna dell’“effetto” dello sforzo stesso sul sistema antagonista (<*più tiro l’elastico più lui mi tira, ma se io faccio più forza lui per tirarmi di più si deve allungare*>). Si mette così in relazione stretta il fare-forza reciproco di due sistemi con (almeno) un aspetto della de-formazione di (almeno) uno dei due: in questo modo il fare-forza diventa “oggettivato” attraverso un aspetto delle deformazioni connesse, che può così essere assunto come **indicatore di intensità** del fare-forza stesso. Di nuovo, si tratta di un processo (fattuale-e-mentale) cruciale in fisica: quando al *cambiamento di una variabile fisica* (p.es. il fare-forza da parte di un sistema) corrisponde con continuità il *cambiamento di una variabile diversa* (eventualmente osservabile – p.es. la sua lunghezza) si parla di "**trasduzione**". Quello che caratterizza di solito una trasduzione è una relazione d'ordine (a variazione maggiore corrisponde variazione maggiore … etc): il punto importante è che in questo modo è possibile stabilire relazioni di eguaglianza fra fare-forza diversi (se lo <u>stesso</u> elastico ha lunghezza uguale nelle situazioni x e y in cui è "tirato" dai sistemi X e Y, vuol dire che nelle due situazioni sta facendo forza con intensità uguale). Attenzione!: lo <u>stesso</u> fare-forza può essere trasdotto in (infiniti) modi diversi: per esempio un elastico più "morbido" di un altro si allungherà di più con la stessa forza… etc. Come in ogni operazione di misura, anche nella trasduzione occorre garantirsi della uniformità del campione usato

Ii) A questo punto diventa possibile (una opportuna sequenza di operazioni sarà riportata in appendice), attraverso strategie di sostituzione e confronto sistematici in situazioni di interazione variate, stabilire sperimentalmente la **versione quantitativa delle regole Id1 e Id2** (che per la loro assoluta generalità assumono spesso la qualifica di "principi"):
Id1*) le azioni-di-forza reciproche fra due diversi sistemi antagonisti in una comune regione di confine sono sempre uguali in intensità e direzione, e opposte in verso;
Id2*) le azioni-di-forza di un sistema che fa-forza (soltanto) in due regioni del suo contorno sono a loro volta uguali in intensità e direzione, e opposte in verso.
Se rappresentiamo spazialmente il fare-forza con una "freccia" di lunghezza proporzionale alla sua intensità trasdotta (cioè con un "vettore" spaziale), possiamo associare a tale rappresentazione il nome di "forza". Diventa così possibile enunciare gli stessi principi in formato astratto e generalizzato, valorizzando per questo la nozione percettiva e intuitiva di "equilibrio" e associandola alla situazione di "somma zero" fra due vettori-forza quando questi siano uguali e opposti:
Id1**) se ci sono *(uno o) più sistemi esterni che interagiscono con un primo sistema* ***in una stessa regione*** (eventualmente attraverso un **sistema-intermediario** opportunamente rigido in grado di "trasmettere" le forze), tutti i diversi fare-forza dei sistemi interessati si trovano sempre in **equilibrio esterno** complessivo, caratterizzato dalla somma a zero di tutti i corrispondenti vettori-forza .

Id2**) la somma di tutte le forze fatte verso l'esterno, in diverse regioni di interazione, da parte di un qualunque sistema è sempre zero (il sistema si trova cioè in **equilibrio interno**). (Se le forze sono solo due, sono sempre uguali e opposte anche se il sistema non è geometricamente e/o materialmente simmetrico: si veda figura7).
Per il caso di più forze, anche non parallele in quanto esercitate dall'esterno in direzioni diverse oppure dall'interno in parti diverse del contorno, cfr più sotto Im.

Il) Se, nel caso più semplice, diversi fare-forza avvengono lungo la stessa direzione (con versi concordi o discordi – se cioè le corrispondenti "forze" sono parallele) è sempre possibile "sommare le forze": inizialmente in modo qualitativo, poi rappresentando le entità-forze attraverso numeri relativi i cui moduli corrispondono alle intensità "correttamente" (cioè proporzionalmente) trasdotte. In altre parole: dall'osservazione qualitativa che <azioni di fare-forza concordi producono un effetto maggiore> (p.es. nella percepita deformazione del sistema antagonista), mentre <azioni discordi danno luogo ad effetto minore>, si può sempre passare alla nozione e all'uso di una "forza unica equivalente" (o "risultante") attraverso operazioni di somma e sottrazione – una volta che l'intensità dei fare-forza sia stata **trasdotta** in modo **coerente** in grandezze-numero per tutti i fare-forza (figura 8). Ma attenzione!: resta comunque il problema di accertare che il sistema di trasduzione adottato sia "corretto", cioè proporzionale (a intensità doppia della forza deve corrispondere un valore numerico doppio della grandezza trasdotta, quindi una lunghezza doppia del vettore rappresentativo). E il problema non è semplice da affrontare: mentre ci si può inizialmente "fidare" della quasi-linearità dei sistemi di trasduzione più comuni (molle tarate, per esempio, come quelle delle bilance), in particolare per intensità di forza abbastanza "piccole".
A questo punto diventa possibile avviare un sistema di "misura" di una qualsiasi forza: in quanto "equilibrata" da un certo numero di forze-unità fra loro parallele, definite ciascuna per esempio dalla deformazione standard (ben riproducibile) di un dato sistema standard, ad una temperatura standard, e così via (figura 9). (Invece di tante piccole molle uguali che fanno forza "in parallelo" fra loro, si possono più comodamente usare tanti piccoli "pesi" uguali che pure fanno forza "in parallelo" fra loro una volta posti su una bilancia: in questo caso si utilizza la deformazione del campo di gravità, che però non produce un'unità di forza costante al variare della distanza dal centro della terra.

Im) (Intermezzo "formale")
Una "freccia" disegnata sul piano può rappresentare diverse cose.
In ogni caso, rappresenta innanzitutto sé stessa: cioè lo **scorrere effettivo** di un punto, lungo una retta e per una certa lunghezza, che ha lasciato la sua **traccia** (il verso dello scorrimento, non evidente dalla traccia, è simbolizzato a posteriori dalla "punta"). Se poi lo scorrimento del punto sul piano segue un percorso qualunque, ci sarà comunque un punto di partenza e uno di arrivo: il corrispondente segmento "orientato" può allora rappresentare lo **spostamento globale effettuato**, reso evidente attraverso il percorso più breve fra i due punti.
Utilizzando convenzioni opportune, da osservare con coerenza, il segmento orientato può anche riferirsi a (può "rappresentare") uno spostamento piano realizzato su un'altra **scala** di misura (per esempio "1cm ←→ 1km", etc).
Uno **spostamento** inteso in quanto indipendente dal suo punto di inizio è un **(esempio di) vettore**: notare che così ci si riferisce proprio (e soltanto) allo spostamento globale (sempre lo stesso) realizzato a partire da un qualunque punto iniziale del piano, seguendo un qualunque percorso: assegnato il punto iniziale lo spostamento definisce quindi automaticamente quello finale (o viceversa; ma infiniti percorsi diversi possono corrispondere allo stesso spostamento … e ci sono giochi infiniti da fare, con il corpo, con gli oggetti, con il disegno, per chiarirsi le idee: inizialmente lo spostamento è ovviamente visto come "localizzato", e la sua "delocalizzazione" implica conservazione di lunghezza, direzione e verso).
Altri fatti fisici possono implicare una **rappresentazione vettoriale** - per esempio una velocità, per esempio una forza, etc; in generale, tutti i fatti che devono essere caratterizzati da una valutazione quantitativa (una "intensità") associata a una direzione e a un verso.
Su i "vettori" si può operare con **regole elementari che valgono per gli spostamenti** (verificare!), anzi ne sono state originate. Per il momento ci limitiamo a considerare una struttura additiva valida per i vettori.
Se ci si riferisce a spostamenti a una dimensione l'additività fra vettori (in questo caso tutti paralleli) si "riduce" a operazioni fra numeri relativi su una qualunque "retta dei numeri" , riferendo il risultato a direzione e orientamento comuni (una volta deciso che "+" corrisponde a un verso, e "-" a quello opposto – cfr più sopra). Infatti lo spostamento equivalente a due spostamenti considerati "insieme" implica che si

assuma il punto finale del primo come punto iniziale del secondo (notare che valgono le proprietà commutativa, associativa, dissociativa … etc dele corrispondenti operazioni sui numeri relativi)(figura 10a).
Sul piano, la "somma" di due spostamenti eseguita con le stesse regole è equivalente a uno spostamento in genere "sghembo" rispetto ad ambedue. In figura 10b è illustrato l'aspetto che assumono le proprietà della somma e della differenza fra due vettori; notare che la proprietà commutativa della somma corrisponde a quella che di solito va sotto il nome di "regola del parallelogrammo". In figura 10c è mostrato un esempio di somma fra più vettori; in figura 10d la "decomposizione" della somma di tre vettori in una somma di due vettori con direzioni assegnate.
Nello spazio succedono cose analoghe: solo che gli spostamenti coinvolti nelle operazioni di somma e differenza in generale non sono più complanari, e soprattutto sono molto più difficilmente rappresentabili (mentalmente e fisicamente).
Se si ha a che fare con vettori che non sono spostamenti le regole per rappresentarli e per compiervi operazioni restano le stesse: solo che le lunghezze devono corrispondere (coerentemente) a "scale" astratte (una unità di forza <-> un cm, … etc), mentre direzioni e versi continuano ad avere lo stesso significato spaziale caratteristico degli spostamenti. (Qualcosa del genere accade anche con i numeri, che possono riferirsi alle "cose", e alle unità di misura, più diverse: però nel caso dei vettori la coesistenza di una marcatura "astratta" e di proprietà spaziali evidenti come direzione e verso causa facilmente - spesso fino all'università … - confusioni cognitive da sbrogliare pazientemente fin dall'inizio, qualunque esso sia. Basta pensare, per esempio, alla rappresentazione della forza che agisce dall'esterno a un capo dell'elastico e dello spostamento del capo stesso fino all'equilibrio; con la "aggravante" che quasi sempre nell'esperienza semplice forza e allungamento sono proporzionali fra loro …).
Ovviamente esistono anche "versioni" vettoriali di prodotto e rapporto, che verranno introdotte (sempre a partire dagli spostamenti) quando saranno necessarie.

In) Quella che nasce come prima rappresentazione, simbolica e qualitativa, l'associazione cioè del fare-forza a un vettore rappresentato spazialmente, si rivela gradualmente attraverso l'esperienza come caratteristica costitutiva del fare-forza più generale. Dicendo che <*le forze "sono" vettori*> riconosciamo infatti che le possibili relazioni fra i più diversi fare-forza sono le stesse che esistono fra i vettori-spostamento nello spazio (a una, due, tre dimensioni), raccordando così l'intuizione e la verifica quantitativa in relazione a tutto quello che accade attorno a noi. (E una competenza spaziale il più possibile precoce e articolata, anche se ovviamente non "forzata" da indottrinamenti superficiali, resta anche per questo motivo una delle chiavi di volta di tutta la formazione cognitiva).

Io) Come conseguenza (e conferma!) delle precedenti regole sul fare-forza si vede allora facilmente che le azioni di fare-forza (**le forze**) **possono essere "trasmesse"** attraverso sistemi interposti (e tutta l'esperienza concreta ce lo conferma, con una infinita varietà di esempi). E nel caso più semplice di una "**catena rettilinea**" di sistemi, la forza fatta (subita) da ciascuno risulterà uguale a quella fatta (subita) da tutti gli altri (figura 11a).
In particolare, uno "**strumento di misura**" è un sistema che, inserito in una catena di fare-forza, **trasmette** identicamente il fare-forza attraverso le sue due zone di interazione, e al tempo stesso **trasduce** la sua propria deformazione (esterna e/o interna) in un cambiamento esterno (p.es. spaziale; ma anche elettromagnetico …) ben osservabile e facilmente misurabile (figura 11b). Il cambiamento poi può essere eventualmente "corretto" all'interno dello strumento stesso per risultare effettivamente proporzionale all'intensità del fare-forza, e quindi essere correttamente inserito nella sua rappresentazione vettoriale.

Ip) Attenzione!, però: è evidente che le due regole Id potrebbero portare al paradosso di "catene" necessariamente infinite in quanto rettilinee (figura 11a). Ma l'esperienza stessa ci dice, e la "natura" intrinsecamente vettoriale del fare-forza ci conferma, che le "catene" del fare-forza si possono facilmente "curvare" e "diramare" ; e proprio l'esperienza essenzialmente tridimensionale del mondo (non potremmo esistere in "Flatlandia" !) rende all'inizio problematica, ma poi anche illuminante e divertente ancorché approssimata, la rappresentazione in termini di interazioni-secondo-forze-rappresentate-da-vettori di una moltitudine di fatti quotidiani. Così ci si rende conto gradualmente che <perché il mondo possa funzionare> **le catene dei fare-forza, in tutte le loro possibili diramazioni, <u>devono</u> essere sempre "chiuse"** per potersi realizzare. Questo può accadere in modo diretto ed evidente in casi semplici (pensare alle due mani dello stesso corpo-individuo che allungano un elastico, figura 12); oppure può coinvolgere (in modo

spesso poco evidente) i "sistemi di riferimento" - sempre necessariamente sistemi fisici - al cui interno e con il cui intervento essenziale sono possibili interazioni di fare-forza che ne soddisfino le regole fondamentali.
Per chiarire questo punto essenziale diventa importante una stretta interferenza cognitiva fra gli aspetti direttamente osservabili dei fenomeni, e quelli che tengono conto della loro modellizzazione "formale". Così se la seconda delle regole Id viene (correttamente) interpretata nel suo senso allargato (la somma vettoriale di tutte le forze esercitate da un sistema deve essere zero), è facile vedere che da una situazione "elementare" di due forze uguali e opposte si può passare (nei fatti come nella loro rappresentazione) a una infinita varietà di situazioni: in cui, in particolare, una delle due azioni di forza può restare invariata, mentre l'altra è variamente sostituita da più azioni che le sono "equivalenti dal punto di vista del puro fare-forza" (figura 13). (Attenzione!: nei diversi casi entra però in gioco la diversa deformazione, interna ed esterna, che il sistema subisce in base alle diverse interazioni).
(Nel caso per esempio di due mani appartenenti a individui diversi che allungano un elastico, la catena dei fare-forza si può "chiudere" solo coinvolgendo oltre ai corpi stessi le forze-peso esercitate su di essi dall'attrazione terrestre, le forze di attrito dei due corpi con il pavimento, la deformazione anche non evidente del pavimento stesso, etc (figura 14) – e si può fare il tiro alla fune su una barca, ma non fra barca e molo… - e così via).

Iq) La riflessione sulle "catene-di-fare-forza" ci riconduce al fatto che finora abbiamo analizzato solo la più semplice "classe" di modalità di fare-forza fra due sistemi interagenti: quella in cui le interazioni locali possono essere schematizzate nei termini intuitivi di "spingere" e "tirare" , a cui corrispondono caratteristiche deformazioni (e/o caratteristici movimenti di traslazione, se il fare-forza non è "equilibrato" staticamente).
(In realtà solo lo "spingere" può svolgersi in molti casi in modo diretto e semplice - eventualmente per interposto sistema. Invece, di solito il "tirare" coinvolge necessariamente ulteriori azioni di forza intermedie, anche complesse, che garantiscano che venga mantenuto il collegamento fra i due sistemi: azioni che possono facilmente sviare l'attenzione, e la percezione, nei confronti di un "semplice tirare" visto come opposto a un "semplice spingere").

L’esperienza reale mostra che esiste una seconda classe di modalità di fare-forza. Si tratta di azioni che in situazioni statiche danno luogo a fenomeni di **torsione** (quando p.es. si fa forza per “svitare” la macchinetta del caffè, le due mani esercitano azioni-di-torsione, qualitativamente percepite come uguali e opposte; quando si fa forza su un rubinetto “duro”, un’azione di torsione è svolta dala mano (dal corpo…), l’altra – opposta e percettivamente poco evidente – dal “sistema di riferimento rigido” a cui il rubinetto può essere collegato). Mentre le stesse azioni in situazioni non statiche danno luogo a movimenti di **rotazione** dei sistemi coinvolti (superato l’attrito iniziale, le due parti della macchinetta ruotano una rispetto all’altra … etc).
D’altra parte, ancor più che per il “tirare”, l’azione di “torcere” o “ruotare” può essere resa poco trasparente dal coinvolgimento delle azioni intermedie necessarie a rendere possibile la stessa azione “principale” (p.es. “stringere” le due parti della macchinetta del caffè, o il rubinetto; “fare leva” intorno all’asse del rubinetto agendo sui suoi “bracci”; … e così via; mentre facilmente il “far male” dello “stringere forte” si mescola con il “far male” del “ruotare con forza” …). Ma, a parte queste difficoltà, è facile accorgersi che nel caso delle torsioni statiche intervengono regole che sono qualitativamente simili a quelle riportate in Id, valide nel caso delle trazioni/compressioni: un sistema può fare-forza-torcendo solo se esiste un altro sistema che gli si oppone con una contro-torsione di intensità equivalente e con verso di rotazione opposto; al tempo stesso, un sistema deve esercitare sull’esterno almeno due torsioni uguali e opposte; mentre un “sistema di riferimento” è spesso in grado di oscurare la semplicità applicativa delle regole. E così via. Tuttavia la somiglianza qualitativa fra i due casi, pur essendo percettivamente ben rilevabile, dà luogo a un processo di formalizzazione (e misura) che, benché analogo, è un pò più complesso del primo in quanto coinvolge operazioni con vettori a tre dimensioni: così questa “seconda metà del cielo” delle azioni di forza, pur così comune nella quotidianità, resta spesso poco rilevata e poco discussa, in relazione alla costruzione stessa dei concetti di base. (E anche qui è “saltata”, per motivi prima di tempo e poi di spazio!).

Ir) Alcuni sistemi (sistemi-viventi, sistemi-motori, etc) possono essere visti come **sistemi** “**attivi**” nel fare-forza di ogni tipo, nel senso (cruciale) che **il loro fare-forza può essere controllato dall’interno** della loro stessa struttura: e in questo modo essi di fatto “costringono” qualunque sistema con cui interagiscono a dei fare-forza che sono eguali e opposti in ogni regione di interazione (6mentre restano comunque vincolati nella loro azione dalla somma a zero di tutte le forze esercitate). Altri sistemi (un “corpo elastico”, un “corpo rigido” , un “corpo plastico”, un “campo” magnetico o gravitazionale – cfr più avanti, …) possono essere invece visti come **sistemi** solo “**reattivi**”, in quanto **il loro fare-forza** non può essere determinato più o meno “liberamente” dall’interno, **ma risulta strettamente vincolato (d)alla loro configurazione globale di interazione**. (A questo proposito è importante tenere ben presenti tutti gli equivoci evocati dal cosiddetto <principio di azione-e-reazione>, in cui non si spiega quasi mai la differenza di significato delle due nozioni; insieme alle difficoltà interpretative che intervengono quando nell’interazione globale due o più dei sistemi sono “attivi”, come in un gioco a braccio di ferro, in un tiro alla fune, e così via).

Is) In generale, in una situazione di fare-forza fra due sistemi si dice che “**sta-per-vincere**” il sistema che, aumentando gradualmente l’intensità del suo fare-forza, “sta-per” rompere la situazione di equilibrio statico con il suo sistema antagonista (che non è più in grado di “equilibrarlo”): e precisamente in un modo tale che la sua **deformazione ulteriore** sia **concorde con il verso del suo fare-forza** e contraria al verso del fare-forza del sistema antagonista (che quindi si deformerà in verso contrario al suo proprio fare-forza). Ma appena si passa dalla situazione statica a quella che coinvolge un cambiamento di configurazione, anche lento, si verificano due nuovi fatti, tra loro contemporanei: da un lato i fare-forza continuano ad essere vincolati ad essere reciprocamente e istantaneamente uguali e opposti, anche nelle loro ulteriori variazioni; mentre il sistema che percettivamente “vince” è vincolato a “perdere” parte della sua energia interna, che viene “acquistata” dal sistema che percettivamente “perde” . Infatti anche la correlazione stretta forza-energia è critica per interpretare correttamente i fatti, mentre al tempo stesso è un pò più complessa da formalizzare del semplice fare-forza (cfr più avanti). Per una prima interpretazione qualitativa, provare a pensare ad un umano che tende un arco: e può farlo o controllando una situazione di equilibrio statico, oppure “caricando” progressivamente l’arco di una quantità di energia che poi l’arco stesso potrà trasferire rapidamente al movimento della freccia. Così nella prima fase (caricamento dell’arco) l’umano “vince” nel fare-forza, mentre “perde” l’energia trasferita all’arco; nella seconda fase l’arco “vince” nel suo fare-forza-contro il movimento della freccia – cfr più avanti, mentre a sua volta "perde" tutta l'energia immagazzinata. (Ovviamente il discorso più semplice si può riferire al "caricamento" di una fionda, o di una macchinetta ad elastico…).

It) Le zone (superfici) di confine-interazione fra sistemi-oggetto possono essere più o meno estese: di fatto, la situazione percettivamente e cognitivamente "normale" è quella in cui il fare-forza non è concentrato su una superficie molto piccola (come accade quando si fa-forza attraverso la mediazione di un "sistema-punta" o di un "sistema-lama"), ma è variamente distribuito su una superficie apprezzabile. Si usa in questi casi la nozione di **pressione**: una grandezza "diffusa", che può essere visualizzata come forza esercitata attraverso ciascun elemento di superficie molto piccolo. Solo nei casi più semplici tutte queste forze "elementari" sono parallele fra loro e di intensità comparabile: così mentre la loro semplice somma dà luogo alla forza "globale" F esercitata dal sistema, la pressione "locale" P viene valutata attraverso rapporto F/S (S superficie dell'area di interazione) (figura 15). E' importante aver presente che:

- qualunque interazione fisica (in particolare corporea) fra sistemi-oggetto avviene attraverso pressioni, in genere non uniformi e variamente distribuite attraverso le superfici di contatto; mentre le nozioni di forza totale e di pressione locale sono ambedue essenziali per definire l'interazione, e soprattutto i suoi effetti sulla struttura stessa dei sistemi interessati (esercitare la stessa forza totale "attraverso" la punta di un dito o il palmo della mano dà luogo a percezioni in parte concordi, in parte discordi; un coltello "più affilato" certamente "taglia meglio", perché tutta la forza esercitata "attraverso" in sistema-coltello viene da questo concentrata su un'area più piccola del sistema antagonista; e così via);
- la presenza contemporanea e articolata di queste due grandezze in ogni fare-forza fra sistemi oggetto è responsabile, se non riconosciuta e (progressivamente) chiarita fin dall'inizio, di molte e durature difficoltà di comprensione;
- in particolare, nell'uso metaforico del fare-forza di cui è comunque intriso il linguaggio naturale i due termini sono spesso usati in modo reciprocamente ambiguo, a sua volta sorgente di confusione (pensare per esempio a cosa si intende comunemente con "forze sociali" o con "pressione sociale"; ambiguità analoghe sono d'altra parte presenti in altre "polarità" essenziali alla discriminazione e comprensione corretta

dei fatti fisici, come per esempio forza/energia, temperatura/calore, e così via);
- la nozione di pressione diventa particolarmente significativa quando si studia la struttura interna di un sistema che interagisce con l'esterno attraverso azioni di fare-forza – in particolare in riferimento alla "pressione interna" presente in un fluido (liquido o gas), che si riferisce alla "azione di forza locale" esercitata da ogni piccola parte del sistema sulle parti limitrofe, e attraverso queste sulla superficie esterna: un chiarimento in merito, pure abbastanza semplice, non è compreso per ragioni di spazio in questo primo gruppo di schemi introduttivi.

Iu) Come già osservato le regole fin qui evocate trovano facili conferme/specificazioni se i sistemi che interagiscono sono "corpi" fisici, percepibili ai sensi nella loro interezza anche se non nella loro struttura interna. E come ben dice lo stesso Newton, i "corpi" inter-agiscono per contatto. Ma occorrono specifiche operative opportune perché le regole possano essere sistematicamente viste come effettive ed efficaci per tutte le situazioni e per tutti i "corpi": motori o resistenti, rigidi, elastici, plastici, liquidi, gassosi etc – in particolare, per i corpi che sono anche sistemi-di-riferimento.
Nel caso invece in cui il sistema fisico coinvolto nel fare-forza sia un "**campo**", il sistema stesso non è direttamente percepibile in maniera indipendente dalle sue azioni di forza, e **le sue caratteristiche** (la sua stessa esistenza) **devono essere inferite attraverso gli effetti delle sue interazioni**: si entra così (da millenni, nella storia della cultura) nel mondo problematico delle "forze-a-distanza".
Il problema concettuale (prima di tutto cognitivo, in senso lato) <u>è</u> spinoso: infatti appena si parla della forza di gravità che si esercita "fra" un corpo e la terra, e/o "fra" un pianeta e il sole …, o della forza che si esercita "fra" due magneti e/o "fra" un magnete e un pezzo di ferro … e così via, si materializza immediatamente l'immagine di due sistemi-corpo (i due magneti, per esempio, ben controllabili percettivamente) che <*esercitano uno sull'altro (ma "a distanza") forze uguali e opposte*>. Questa immagine, che del resto proviene direttamente dall'intuizione percettiva di Newton stesso, e sopravvive in quasi tutti i testi odierni, è sostanzialmente legata (e distorta) dalla percezione diretta: tenendo in mano i due magneti si "sente" infatti che <*si tirano fra loro come i due capi di un elastico teso*>. Già: ma nel caso dell'elastico <u>non</u> sono i due capi che si tirano fra loro, ma è il sistema-elastico nella sua globalità che interviene nel fare-forza, vincolato (d)alle regole del fare-forza e dell'acquistare-

cedere energia; e in ogni caso coinvolgendo nel soddisfarle importanti (anche evidenti) cambiamenti nella sua struttura interna. Allora, cosa può voler dire <*forza a distanza?*> Qualcosa di "magico", come già si rimproverava a Newton (comunque sottovoce, visto che "così le cose funzionano, in cielo e in terra"?). D'altra parte la stessa immagine si trascina dietro molte difficoltà di comprensione appena le situazioni diventano fisicamente più complesse, difficoltà però connesse anche ad incoerenze di prima impostazione concettuale: infatti non appare evidente né se vi sia né quale sia in questo caso qualche sistema de-formato dall'interazione; né dove possa essere "localizzata" la deformazione stessa, o l'energia connessa che è comunque rilevabile e misurabile direttamente nella sua globalità istantanea (cfr più avanti).

Il presente approccio propone, sulla base dei dati di fatto accertati dalla fisica e dei modi di pensare verificati come i più efficaci per "capire" i fatti stessi, di considerare fin dall'inizio i sistemi-campo come sistemi fisici del tutto analoghi nel loro comportamento ai sistemi-corpo, applicando quindi loro le stesse regole fin qui elaborate. Per fare ciò occorre (almeno!):

1) **"Vedere" il campo** come un sistema non-materiale che si estende nello spazio, e che ha nelle sue "sorgenti" (i due magneti, il sasso e la terra, il sole e il pianeta … nel caso più semplice, oppure in situazioni con più corpi materiali) le sue "regioni di interazione" con altri sistemi fisici (che a loro volta possono essere in forma materiale, o di campo). Così il campo magnetico fra due magneti che si attraggono è de-formato rispetto al suo stato naturale dalla interazione di ciascuno dei magneti stessi con il sistema molla-interposta (e compressa) che li tiene lontani, o con le due mani che fanno forza per tenerli separati esattamente come fanno forza per tenere allungata una molla (e appunto nessuno direbbe, in questo caso, che i due estremi della molla si attraggono reciprocamente "a distanza"). (figura 16)

2) **"Vedere" il campo** come dotato di struttura ("forma") interna, rilevabile in modo strumentale (per esempio esplorando con una "piccola" bussola lo spazio fra due "grandi" magneti tenuti fermi da altre forze, bussola che benché sia a sua volta "sorgente" dello stesso campo non ne fa variare di molto la struttura, definita dai due "grandi" magneti (figura 17); o "esplorando" il campo di gravità definito dalla Terra e da un un "peso" con un altro "peso" - ambedue comunque "piccolissimi" rispetto alla Terra stessa, e quindi tali da attrarsi "in confronto pochissimo, fra loro"; etc).

3) **"Vedere" il campo** come "luogo-deposito di energia interna" (cfr più avanti), correlata alle sue deformazioni (in modo analogo si puo' "vedere" l'energia interna di una molla compressa come distribuita uniformemente nella molla stessa, oppure l'energia interna di una spugna elastica compressa da un dito come più concentrata nelle regioni di maggiore deformazione interna).
4) **"Vedere" le zone di interazione** del campo, definite dalle sue "sorgenti", non come parti della superficie-limite di un corpo fisico, ma come volumi riempiti di materia attraverso cui il campo interagisce in maniera "diffusa", così come in maniera "diffusa" avviene l'interazione superficiale fra sistemi-corpo. (Il campo di gravità interagisce in modo "praticamente uniforme" con tutte le "parti piccole" di massa contenute nelle sue sorgenti-corpo, con una forza globale somma di tutte le forze elementari … etc).

Iv) Un avvicinamento graduale ma precoce alla concettualizzazione del "sistema-campo" in quanto tale è essenziale per tutta la comprensione della fisica (anche elementare), a livello sia macroscopico (sistemi percettivamente rilevabili) che microscopico (modellizzazione della struttura interna dei sistemi stessi). Una ulteriore difficoltà percettivo/cognitiva è data tuttavia dalla stessa presenza continua del campo di gravità: sia per la non ovvietà della "seconda" sorgente-causa (la Terra); sia perché il campo rilevato a livello di esperienza quotidiana è praticamente "uniforme" e (quasi) per nulla alterato dalla presenza di una qualsiasi molteplicità di sorgenti, comunque "piccolissimee" rispetto alla Terra stessa; sia perché la forza di campo è "equilibrata" quasi sempre dalla deformazione (anche poco evidente) di un supporto o di un corpo vivente, e comunque dal movimento stesso di caduta (cfr più avanti) - tutti sempre inter-posti fra la sorgente "piccola" e quella "grande". A questo scopo è importante che una prima padronanza plausibile ed efficace dell'idea stessa di "campo" (che comunque ha richiesto millenni di storia culturale per definirsi in modo soddisfacente) sia mediata nei ragazzi anche attraverso l'esperienza sistematica e variata con campi magnetici variamente e opportunamente "manipolati". Tenendo presente (ahimé …) che in questo caso il campo ambientale (campo magnetico terrestre rilevato dalle bussole, più o meno uniforme in zone limitate) può essere violentemente alterato (anche quasi oscurato) dalla presenz6a di magneti, e comunque deformato dalla presenza di ferro (o altri metalli "magnetici").

Iw) Esperienze precoci e variate in cui forze di origine diversa (corpi viventi, sistemi fisici semplici, strumenti, campi, motori…) si equilibrano fra loro in varie combinazioni sono cruciali per definire e rappresentare progressivamente, prima gli uni per analogia e/o contrasto con gli altri, e poi tutti attraverso “forme” grafiche e numeriche, i diversi modi del fare-forza: questo in contemporaneità necessaria con la stessa, progressiva esplicitazione delle “regole” (che, come già osservato, valgono sempre “tutte insieme”) e con la loro sempre più sicura rappresentazione.
In particolare. Da un lato è importante insegnare/imparare a rappresentare i sistemi e i loro fare-forza in modo schematico e convenzionale, per cogliere la stessa generalità delle regole. D’altra parte la varietà estrema di situazioni concrete (e quotidiane) definite da un fare-forza rende l’**accomodamento** mentale **alla schematizzazione**, e l’**assimilazione** dei contesti **agli schemi**, particolarmente problematici dal punto di vista cognitivo. Per questo motivo un **percorso di concettualizzazione in relazione al fare-forza** e alle sue profonde implicazioni culturali deve essere **visto come**:
- da sviluppare progressivamente **in verticale**, sempre lavorando sulle competenze globali (percettive, linguistiche, formali, esperienziali, …) effettivamente disponibili, da mobilitare e mettere in relazione reciproca in modo esplicito e consapevole;
- da sviluppare secondo una **logica “disciplinare” coerente**, a partire dalla scuola d’infanzia per quanto possibile ma rispettando a qualunque livello il vincolo di “comprensibilità/credibilità globale” di quanto si propone (quindi, in particolare, partendo dai “fondamenti” a qualunque età si cominci a lavorare);
- da sviluppare sia attraverso **situazioni emblematiche**, a cui via via riferire per somiglianza e variazione sempre nuove situazioni; sia attraverso un sistematico, diffuso, esibito **controllo dei modi di ragionare-parlare-agire** nei contesti quotidiani (anche metaforici) che ne metta in evidenza la struttura: fino a costituire uno sfondo padroneggiato di “conoscenza implicita” da mettere a fondamento di più specifici sviluppi futuri.

Ix) Le forze-in-quanto-tali non “esistono”. Le “**entità-forze**” si prestano d’altra parte in modo efficace a **schematizzare e modellizzare** mentalmente i diversi modi di “fare-forza” da parte dei sistemi, dando luogo a “regole” quantitative e generali; mentre possono essere a loro volta **rappresentate** - “vettorialmente”, abbiamo visto: fin dalla prima comprensione, se ci si collega efficacemente a strutture di dinamica cognitiva “primaria” (“quanto”? … “in che direzione”? … “in che verso”? … e le <frecce> vengono fuori quasi spontaneamente). E’ anche essenziale (far) notare immediatamente che questa rappresentazione spazializzata ha le stesse regole “formali” (da approfondire gradualmente) di quella degli spostamenti (cfr più sopra) che avvengono nello spazio, anche su scala diversa da quella di rappresentazione. Nel corso dello sviluppo si vedrà, prima intuitivamente poi formalmente, che anche le rappresentazioni delle velocità, dei cambiamenti di velocità, e di altre variabili fisiche, sono “isomorfe” (cioè si possono descrivere con lo stesse regole formali) rispetto a quella degli spostamenti, e delle forze : cioè che molte altre grandezze “hanno natura vettoriale”. (Ma quando poi ci si trova in mezzo a <*tutto quel frecciò*>, con i significati più diversi assegnati alle singole <frecce>, diventa molto facile perdersi … proprio come succede con i numeri, e i significati dei numeri). D’altra parte all’inizio di un percorso sul fare-forza ci si può limitare a “formalizzare” completamente solo forze tra loro parallele: in questo caso diventa evidente che, come accade per le posizioni lungo una linea, nello spazio a una dimensione anche per le forze di vario tipo i versi (i segni positivo o negativo) e le unità di misura devono essere fissati una volta per tutte, arbitrariamente ma coerentemente. A questo proposito, cfr. p.es. situazioni variate di “galleggiare-andare a fondo”, controllate da una mano che sorregge un corpo, di volume costante ma variamente pesante e variamente immerso, attraverso una molla di cui si rileva la lunghezza; con il recipiente d’acqua appoggiato su una bilancia di cui si rileva la lettura in relazione al volume immerso e alla lunghezza della molla …etc: situazioni controllate da forze tutte verticali, in cui il primo passo è comunque quello di stabilire comuni unità di misura. (figura 18: le forze sono solo accennate nel loro verso, situazioni di equilibrio con il corpo sospeso, parzialmente o totalmente immerso, galleggiante, a fondo … sono ovviamente caratterizzate da forze di intensità diverse da parte dei vari sistemi in gioco, inclusa la bilancia che sorregge il recipiente d’acqua).

Iy) Le rappresentazioni schematiche sono essenziali sia per fissare quello che si è capito, sia per capire quello che si sta ancora cercando di capire. E in questo (doppio) senso vanno insegnate e usate con “intelligenza”, strategica e flessibile. Per esempio. Di solito in una situazione vi sono zone che sono più “importanti” da capire e controllare rispetto ad altre (meno rilevanti in assoluto, o già note, o per il momento ignorate): e in tali zone vale la pena che la rappresentazione delle interazioni sia più completa e corretta, senza dover estendere la schematizzazione delle forze in gioco a “tutti” i sistemi interagenti (compito quasi sempre troppo lungo, molto spesso impossibile). Così si può studiare un tratto di “catena di forze” interrompendo a un certo punto la rappresentazione dei sistemi interagenti: magari completando ogni ramo “interessante” con un “mezzo sistema” che lascia aperta la possibilità di prosecuzione, del ramo e della catena (figura 19). Si capisce in questo modo anche il senso dell’abitudine “esperta” (o che viene imposta a priori come tale – per esempio in un libro di testo) che spesso finisce per omettere una esplicita e corretta rappresentazione dei sistemi interagenti per concentrarsi soltanto su alcune delle forze globali esercitate: abitudine che però produce molto spesso problemi seri alla comprensione di chi esperto non è (ancora), ma ha bisogno di discriminare e stabilizzare criteri e significati della schematizzazione in relazione alle idee-chiave di cui “appropriarsi”.

Un nodo cruciale in tutti i “giochi” con il fare-forza è dato dalla comprensione e rappresentazione della **forza-peso** che agisce su qualunque sistema-corpo. C’è, sempre, un triplo problema.
Da un lato la forza-peso è una forza di campo, e va capita come tale: ogni “punto materiale” è quindi attratto dalla Terra <a distanza> con una forza proporzionale alla sua massa, mentre il punto attrae la Terra con una forza uguale e contraria (cfr l’analogia con il campo magnetico fra due magneti); data l’enorme massa della Terra e la minuscola (in confronto) massa di ogni corpo, il corpo stesso è sollecitato a “cadere” visibilmente mentre qualunque movimento “contrario” della Terra è impercettibile.
Da un altro lato, ogni “parte piccola” della Terra attrae ogni “parte piccola” di ogni corpo. La situazione, di per sé molto complicata, si “semplifica” per la forma approssimativamente sferica della Terra per cui “è quasi come se” tutta la massa della Terra fosse concentrata nel suo centro. Qualcosa di simile accade per ogni corpo: e di solito chiamiamo appunto “baricentro” il punto in cui “è come se” fosse concentrata tutta la massa del corpo, dal punto di vista dell’attrazione terrestre. Notare che, data la piccolezza del corpo in relazione alle dimensioni della Terra, “è praticamente come se” tutte le forze di attrazione che agiscono sulle sue parti piccole, come su quelle dei corpi vicini, fossero tra loro parallele.
Infine: cosa impedisce a un corpo di essere attratto fino al centro della Terra? Il fatto che la struttura “rigida” della Terra e tutta la struttura del

corpo interposte fra la zona di contatto e tutte le “parti piccole” si deformano (impercettibilmente la Terra, a volte in modo ben percepibile un corpo non rigido) dando luogo a forze di deformazione che mantengono l’equilibrio e “trasmettono” la forza-peso complessiva fino alla superficie di contatto (figura 20).
Sembra semplice: ma prima di convincersi…

Iz) Ovviamente fin qui il percorso cognitivo “verticale” sul fare-forza è stato solo abbozzato nelle sue (critiche) fasi iniziali, valide però a qualunque età. Si è detto infatti, sia nel lavoro con gli insegnanti che nell’avviare la scrittura di questi schemi, che si voleva dare solo un “assaggio” di un possibile (motivante, efficace, divertente …) modo di lavorare a scuola: e ora si mantiene il punto, troncando momentaneamente il discorso. (Rispetto al lavoro in presenza si è solo cercato di specificare meglio qualche aspetto originariamente dato per acquisito in modo colloquiale). Forse si tronca il discorso <*proprio sul più bello*>, potrebbe dire qualcuno. Infatti a questo punto diventa decisamente “facile” e soddisfacente agganciare quanto detto/sperimentato ad un nuovo discorso che allarghi le **regole sulle forze** viste finora fino ad includere i loro effetti (cosiddetti difficili) **in situazioni di movimento**; e ad un altro nuovo discorso che introduca, a partire dalle stesse regole sulle forze oppure in maniera indipendente, quelle (cosiddette difficili) **regole sull’energia** senza le quali la comprensione dei fenomeni è di necessità in parte distorta (come handicappata). Questi nuovi discorsi/percorsi, già sperimentati in altre situazioni, sono stati anche abbozzati in alcuni momenti di lavoro del gruppo: c’è l’intenzione e la speranza di portarli avanti, con chi ha già lavorato e con chi vorrà unirsi al lavoro; e come segno di questa intenzione-speranza si lasciano in questi schemi tutte le note <*cfr più avanti*> che rinviano a ulteriori sviluppi. (Note che del resto sono un inevitabile strumento condiviso di lavoro quando si affronta un percorso cognitivo complesso, sia con i ragazzi che con i “grandi”).

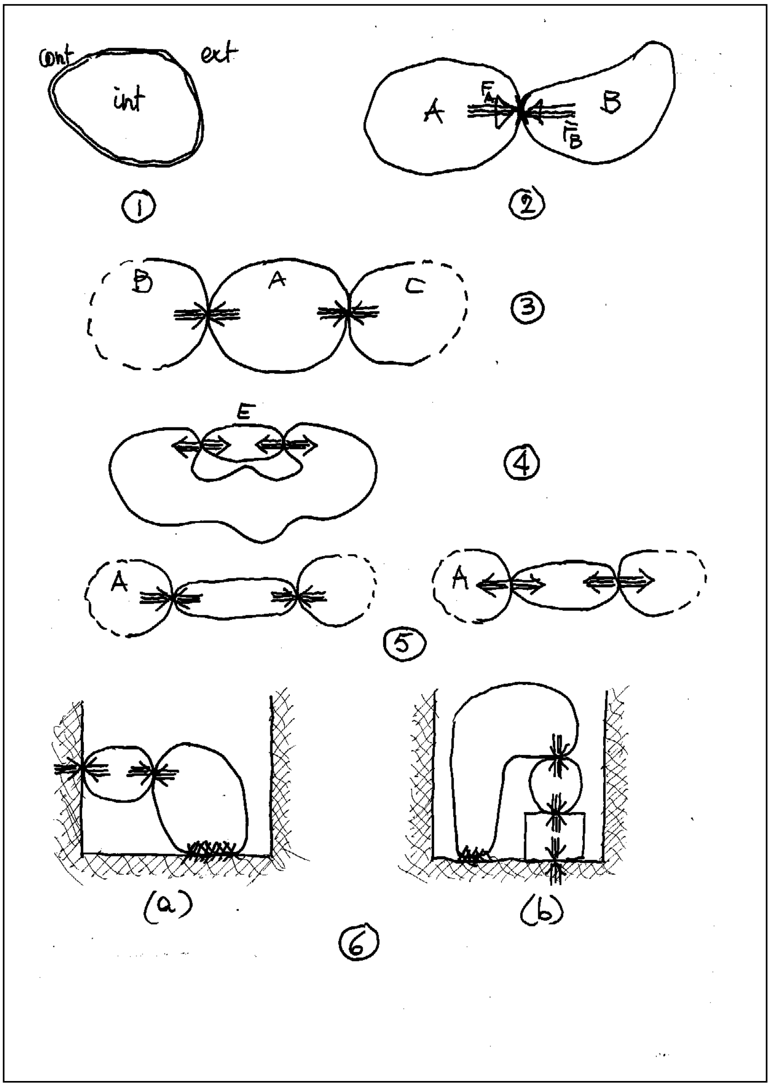


Figura 1. Sistema-corpo schematizzato (interno – contorno – esterno).
Figura 2. Due sistemi-corpo antagonisti: le "forze" esercitate sono uguali in intensità, nella stessa direzione e in versi opposti
Figura 3. interazione fra tre sistemi: A esercita verso l'esterno forze uguali e opposte.
Figura 4. Per allungare un elastico (sistema E)…
Figura 5. Spingere e tirare
Figura 6a. Un sistema-oggetto è schiacciato "contro" il riferimento rigido (nella zona tratteggiata le forze di interazione non sono esplicitate)
Figura 6b. Un altro sistema-oggetto è interposto prima del riferimento rigido.

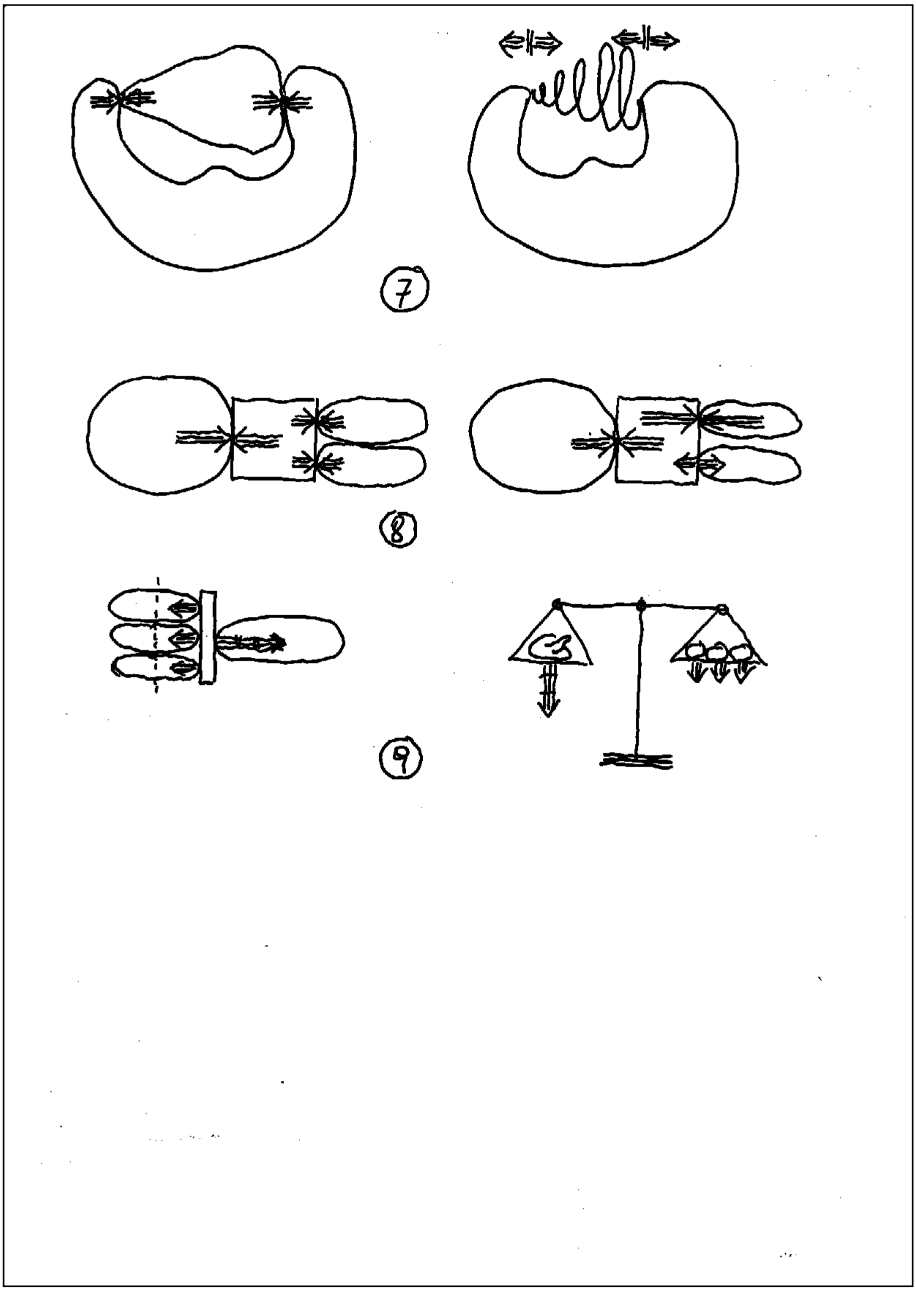


Figura 7. Fare-forza verso l'esterno di sistemi non fisicamente simmetrici
Figura 8. Fare-forza paralleli: somma e sottrazione. (Attenzione al sistema rigido intermedio che "trasmette" le forze)
Figura 9. Molle-unità deformate in modo standard; pesi-unità sulla bilancia

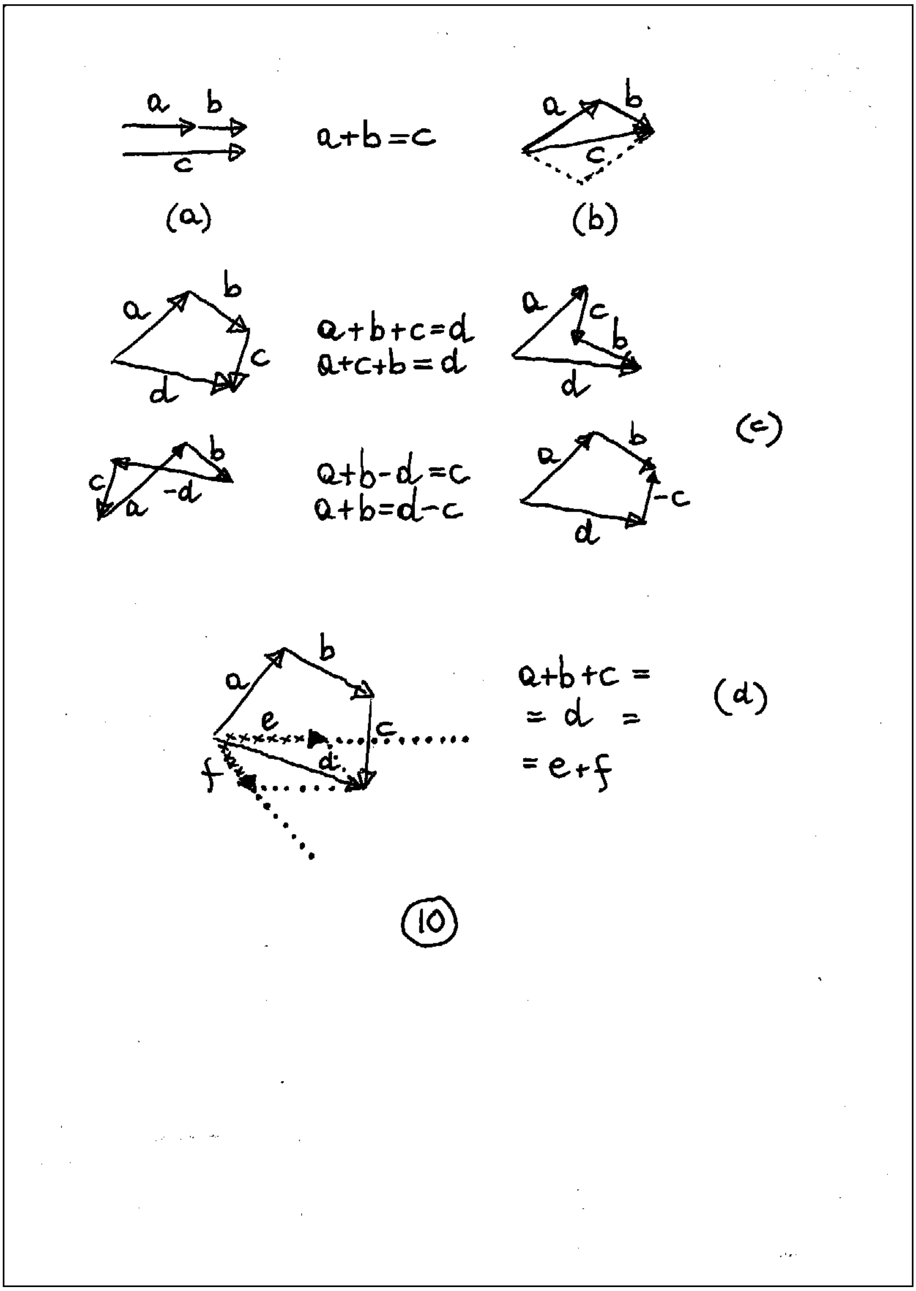


Figura 10. Operazioni di addizione e sottrazione fra vettori: a) due vettori paralleli; b) due vettori sul piano; c) somma, differenza, proprietà con più vettori; d) “decomposizione” della somma di tre vettori in una somma di due che hanno direzioni assegnate.

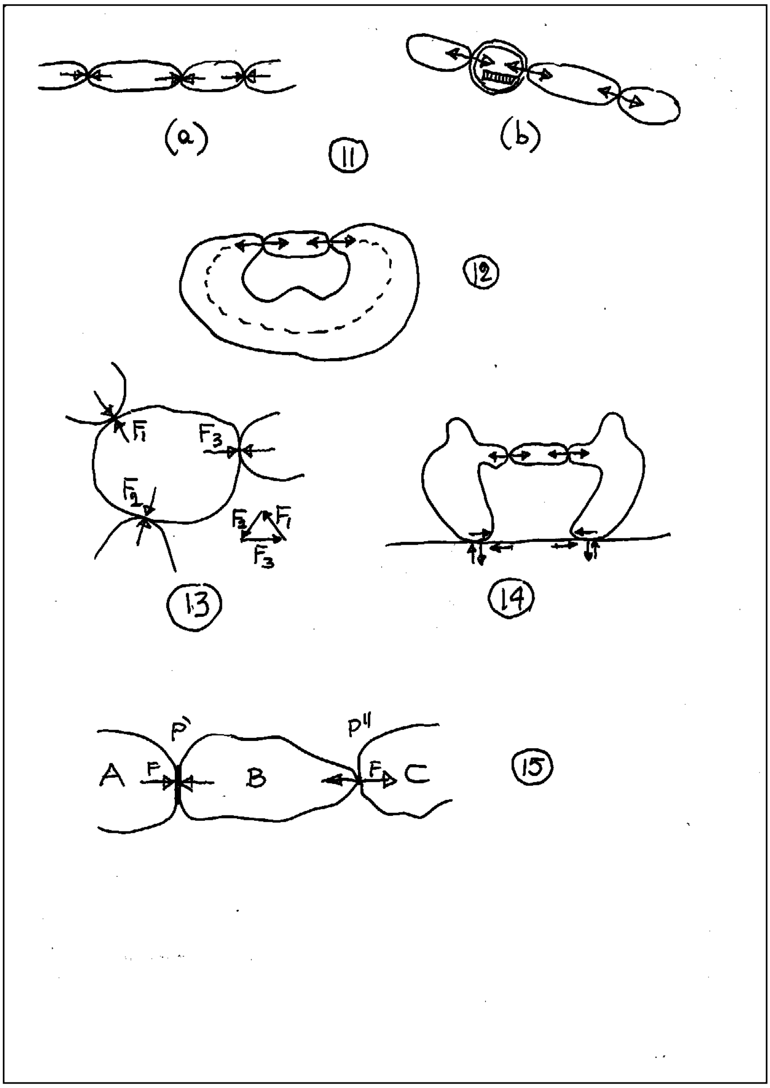


Figura 11a. Catena rettilinea.
Figura 11b. Inserimento di strumenti.
Figura 12. Un uomo che allunga un elastico: la catena dei fare-forza è chiusa.
Figura 13. La somma delle forze esercitate dall'interno di un sistema è sempre zero, qualunque sia il numero di sistemi interagenti.
Figura 14. Due persone diverse allungano un (grande) elastico: la catena dei fare-forza include la forza di gravità, l'attrito scarpa-pavimento, le deformazioni del pavimento… etc.
Figura 15. Pressione: la forza globale **F** trasmessa da A a C attraverso il sistema intermedio B è la stessa che A esercita su B, ma la pressione **P'** di A su B è molto minore di quella **P''** di B su C.

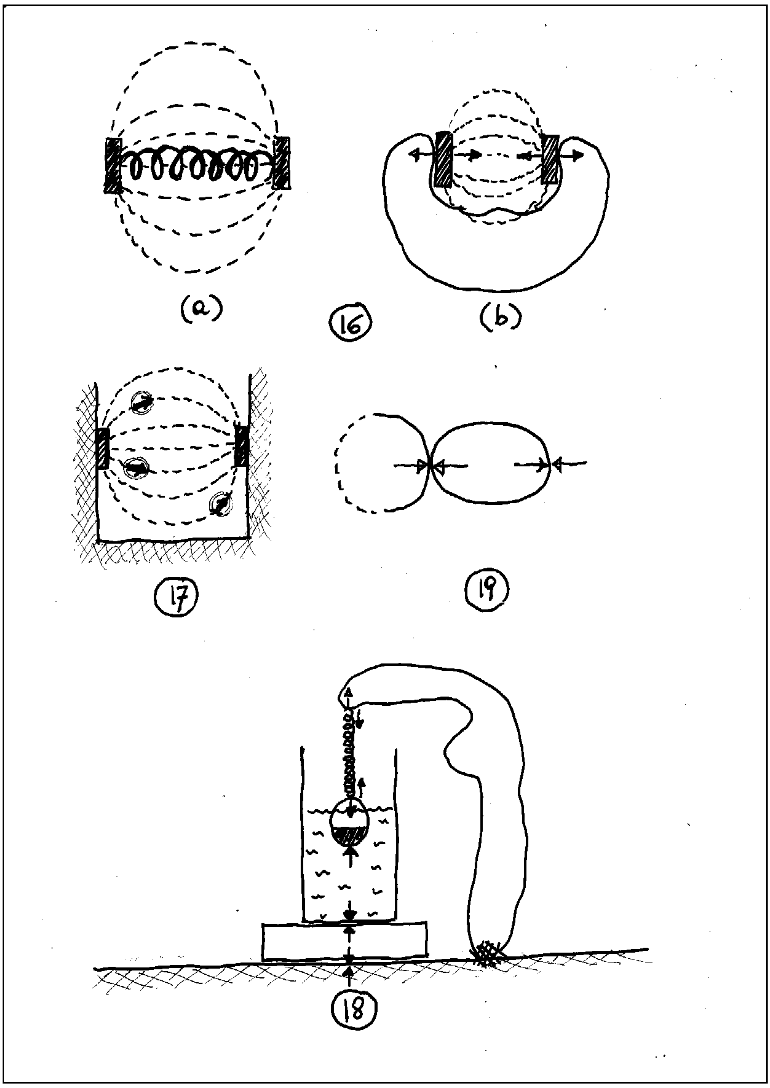


Figura 16a. Sistema-molla e sistema-campo interposti fra i due magneti: il campo fa-forza “per contrarsi”, la molla fa-forza “per espandersi”, la situazione è di equilibrio.
Figura 16b. Le due mani fanno-forza per allontanare i magneti: con forze diverse i magneti sono in equilibrio a distanze diverse.
Figura 17. campo magnetico “fra” due “grandi” magneti “esplorato” da “piccolissimi” magneti (piccole bussole).
Figura 18. Galleggiare e andare a fondo: le diverse forze verticali si possono equilibrare in situazioni diverse.
Figura 19. Interruzione di catena – forza globale rappresentata senza il sistema che fa-forza.

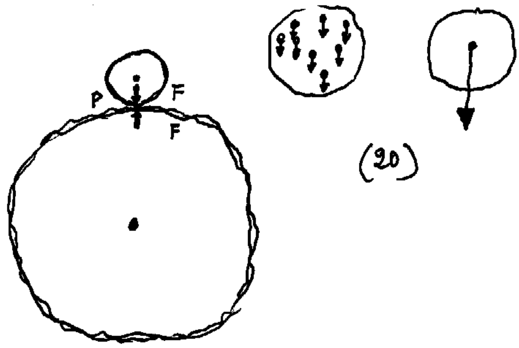


Figura 20. Un corpo in equilibrio sulla superficie della Terra: la somma F delle forze di attrazione sulle "parti piccole" agisce sulla superficie di contatto, dando luogo a una pressione P.

Capitolo III – Galleggiamento

Lavori di O. Ciarlo, A. Di Santo, A. Follo, R. Guerra, A. Maio, G. Marino, P. Parlapiano
Gruppo coordinato da C. Minichini

Il lavoro intorno al galleggiamento, di cui qui presentiamo un resoconto, è stato condotto in classi di diverso livello, dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado, in scuole differenti.
Le esperienze sono state varie, distinte, ispirate a quanto era stato discusso durante la formazione: in ciascuna classe, comunque, si è scelto il modo in cui affrontare il tema, come integrarlo con il resto del lavoro curricolare, da dove prendere le mosse e quali aspetti mettere in evidenza.
Tutti i contributi provenienti dalle diverse esperienze sono stati montati in un racconto unico, dopo che tutte le persone coinvolte avevano condiviso quanto era accaduto nelle classi coinvolte e dopo averne discusso insieme.
La scelta del resoconto a una voce, oltre a essere un modo per garantirne una migliore leggibilità, è in linea con l'idea che le opportunità e i problemi che si presentano sono comuni (ai diversi insegnanti, ai diversi gradi) indipendentemente dalla varietà dei modi in cui i temi disciplinari possono essere sviluppati nel tempo.
Ricostruiamo la nostra esperienza in diverse sezioni: nella sezione *Racconto* riportiamo una traccia dei diversi percorsi condotti, montati insieme e ricostruiti nella forma di narrazione unica; nella sezione *Commenti*, sono riassunte alcune riflessioni emerse contestualmente al resoconto che ciascuno ha riportato al gruppo di colleghi, al termine del lavoro; nella sezione *Stralci* riportiamo qualche elemento (disegni, discussioni etc.) direttamente preso da quello che è avvenuto in classe, volendo gettare uno sguardo nelle situazione così come si sono effettivamente concretizzate, mentre parliamo di quello che ci è successo; la sezione *Intervista* è ricostruita a partire dalla sbobinatura di una discussione tenuta alla fine dell'intero percorso.

Racconto

Una delle possibilità che abbiamo esplorato è stata quella di prendere le mosse da un lavoro sul *fare-forza*, visto che i problemi di galleggiamento possono essere ricondotti al relativo modello. In particolare, dato il ruolo giocato dalla variabile peso quando si prova a costruire modelli di galleggiamento, abbiamo iniziato a discutere con i bambini intorno a cosa succede quando si pongono gravi sui piatti di una bilancia a due

bracci: ci sembra che il modo in cui due pesi su due piatti si equilibrano (o comunque si confrontano) richiama il modo in cui si equilibrano peso e spinta dell'acqua nel caso di galleggiamento, così che il ruolo giocato da un contrappeso nel primo caso è analogo a quello giocato dall'acqua nel secondo.
I bambini parlano delle posizioni che assume la bilancia e confrontano le diverse configurazione in termini di peso degli oggetti posti sui piatti: "questo va *più* giù perché è *più* pesante di quello"*;* quando sono invitati a disegnare la situazione di cui stanno discutendo, molti bambini rappresentano il piatto su cui sono poste le cose più pesanti come se fossero più grandi.
Da un lato, ci fermiamo a considerare che i bambini hanno allora scelto un modo per dire "*più*" con un disegno e questo modo è disegnare una cosa "*più*" grande; dall'altro lato pensiamo che sia importante partire da qui, per spostare questo "è più" su altre variabili; vorremo considerare questo fatto con molta serietà: quando i bambini disegnano un oggetto *più grande* di un altro, stanno provando a stabilire e fissare un ordinamento, con il mezzo espressivo che hanno a disposizione in quel momento; il problema ora – per noi insegnanti – diventa spostare l'attenzione sul fatto che quegli oggetti posti sul piatto della bilancia si possono ordinare anche secondo altri criteri, rispetto ad altre *variabili*.
Di fronte alla loro strategia, ci è venuto in mente di chiedere: "ma come mai questo piatto è diventato così grande? forse si è trasformato?", ricevendo un coro di "sì" in risposta. Del resto, anche quando abbiamo cominciato a discutere di cosa significasse "essere più pesante", le prime risposte che abbiamo raccolto hanno evidenziato come l'uso del concetto di pesantezza fosse legato a quello di *grandezza* (nel senso di estensione spaziale): *"è più grande!"*, molti dicono.
Poi, riflettendo insieme, abbiamo pensato che sarebbe stato opportuno provare a spostare l'attenzione dei bambini sul fatto che l'uso della bilancia potesse invitare a stabilire differenze (quelle che diciamo di peso) anche tra *oggetti* della stessa grandezza (quindi facendo confrontare *cose* uguali in forma e dimensioni, ma di peso diverso); ma anche lavorando a riconoscere che *cose* ugualmente pesanti possono essere diversamente voluminose.
Del resto, tutti i problemi di galleggiamento con cui ci siamo confrontati avevano presentato anche a noi la necessità di ordinare gli oggetti secondo variabili diverse (in particolare peso e volume, nessuna delle quali esaustiva per ordinare gravi secondo il loro *galleggiare più o meno*, tanto meno sufficienti a discriminare tra galleggia/non-galleggia).

A questo punto, però, ci sembra importante fermarci a riflettere sul fatto che dobbiamo comunque trovare dei modi per rappresentare (e farlo su un disegno) un *essere di più* che però non è da intendersi nel senso dell'estensione spaziale: una cosa che ci viene in mente è che si potrebbero invitare i bambini a farlo con delle frecce di diversa lunghezza; del resto questo è (almeno in relazione all'intensità delle grandezze) quello che si fa quando, con i più grandi, si lavora con i vettori: tradurre l'essere *più* o *meno* con una maggiore o minore lunghezza.
Pensiamo che, piuttosto che mettere a disposizione a priori queste rappresentazioni, si potrebbe provare a costruirle con i bambini, partendo proprio dalla necessità di distinguere l'essere *più grande* dall'essere *più qualcos'altro* (in questo caso pesante), invitandoli anche a notare che il piatto della bilancia che abbiamo tra le mani non si è ingrandito tra un passaggio e l'altro, a differenza di quanto essi hanno disegnato.
Del resto, come a noi è venuto in mente di usare frecce di diversa lunghezza, ai bambini potrebbe venire in mente di usare un altro tipo di rappresentazione, ad esempio con il colore: ancora un'altra soluzione è stata proposta da un bambino della scuola dell'infanzia (come si vede nella sezione *Disegni*).
Il richiamo alle differenze di peso come giustificazione per spiegare quello che succede è molto diffuso quando, insieme ai bambini, ci si interroga intorno al galleggiamento, chiedendosi perché alcuni oggetti galleggiano, mentre altri affondano. Spesso abbiamo preso le mosse dal riferimento a un'esperienza vissuta (per esempio l'andare a mare) fino ad arrivare al galleggiamento. Di solito abbiamo raccolto vari oggetti, le vaschette e ci siamo interrogati, insieme ai bambini, sul comportamento di quegli oggetti in acqua.
E anche qui si registrano considerazioni che fanno il paio con quelle riportate sopra (così come, del resto, avviene spesso di primo acchito anche quando sono adulti a provare a dare spiegazioni in merito): i più leggeri galleggiano, i più pesanti affondano. In alcuni casi il lavoro nelle classi di scuola primaria è iniziato chiedendo ai bambini di ipotizzare come si sarebbero disposti in acqua oggetti di una certa collezione. In altri casi, dove pure si è deciso di cominciare dalla disposizione di gravi in acqua, si è optato per argomentare a partire direttamente dalle differenze osservate e da quali fossero i *motivi* per cui alcune cose galleggiano e altre vanno a fondo.

Non ci sembra tanto importante – in relazione a come cominciare un percorso intorno al galleggiamento – insistere su un modo specifico, invece che su un altro; piuttosto, vorremmo sottolineare che quello che conta è fermarsi a cercare di dare conto delle differenze e delle somiglianze tra i fatti di cui si sta parlando.
In entrambi i casi, infatti, il gioco è stato quello di provare a mettere in discussione l'utilità di ciascuna delle variabili (peso, grandezza, forma etc.) a cui i bambini si riferivano per dare ragione dei fatti che accadevano nella vaschetta; e ogni volta, quando sembrava che si fosse venuti a capo della questione, quando la spiegazione sembrava esaustiva, venivano richiamati casi che smontavano la conclusione raggiunta.

> Francesco: Io non ci capisco niente, alcune cose pesano meno dell'acqua e vanno a fondo, altre sono più pesanti e galleggiano. Perché?
> Miriana: Ci deve stare qualcosa che noi non riusciamo a indovinare.

Del resto questo succede anche con i ragazzi più grandi (come si può leggere nella sezione *Stralci*); e succede anche con gli adulti intenzionati a venire a capo della questione.
In questi casi è stata fatta la scelta di porre la questione del galleggiamento a partire dalla complessità dei fatti che vediamo o che facciamo succedere: questa complessità, legata all'intreccio delle variabili in gioco, si riflette nella complessità dei discorsi condotti, nel fatto che spesso siamo costretti a ritornare su una strada già percorsa, nelle contraddizioni che esprimiamo lungo il cammino. Il tentativo, in questi casi, è stato quello di iniziare a dipanare la matassa di tutti questi fatti legati tra loro, dipendenti uno dall'altro: in particolare, cercando di chiarire il ruolo giocato da peso e volume e come questi dovessero essere considerati insieme, per dare spiegazioni plausibili dei fenomeni considerati. Lo sforzo che abbiamo fatto è consistito nel cercare di evitare forzature nell'introduzione di concetti, provando a seguire le considerazioni dei bambini e accompagnandoli nella ricerca, nel tentativo di spiegare, nella scelta delle operazioni da fare, mentre si provava a slegarsi dal *peso* come unica variabile da tenere presente: ci sembra che questo sia il lavoro più difficile.
D'altro canto, una alternativa è stata partire dal caso in cui alcune variabili sono implicitamente fissate: quindi considerando problemi in cui il peso dei gravi immersi in acqua è variabile, mentre il loro volume è fissato (come nel caso di un barattolo di vetro che si riempie progressivamente di biglie); o al contrario, casi in cui è il peso a essere

fissato, mentre il volume varia (come può con buona approssimazione essere il caso di un palloncino riempito di bulloni e progressivamente gonfiato).
Durante il gioco del progressivo riempimento di un vasetto abbiamo spostato l’attenzione dei bambini sul fatto che quello “prende il posto dell'acqua” e che *parallelamente* l'acqua aumenta di livello. Questa attività – in una prima di scuola primaria – ha permesso anche di lavorare sul contare come reiterazione di un’azione (fare il successivo/aggiungere una biglia; togliere una biglia/fare il precedente). Una cosa simile è stata fatta, poi, con i barattoli da caffè: uno vuoto, uno progressivamente riempito con la segatura e un altro con la sabbia (si tratta dunque di un caso analogo a quello del vasetto di vetro, in cui il peso dell’oggetto messo in acqua può essere fatto variare con *continuità*, piuttosto che a salti fissati.
Ritornando, poi, alla possibilità di connettersi al modello di fare-forza, in connessione con l’attenzione alle variabili peso e volume e alla correlazione tra i diversi fatti che succedono, abbiamo condotto altre attività. Abbiamo fatto immergere tre palloncini di dimensioni diverse in un contenitore con dell’acqua, invitando a *sentire* la forza fatta contro dall’acqua e *parallelamente* segnando il livello che l’acqua raggiunge di volta in volta nel contenitore, con l’intenzione di stabilire connessioni tra intensità della spinta, livello dell’acqua e volume di fluido spostato.

Giovanna: La forza delle mani fa scendere il palloncino.
Elena: Quando lasci il palloncino, la forza dell’acqua lo fa salire.

Un’altra esperienza è stata quella in cui la spinta di oggetti in acqua, o il progressivo tirare fuori oggetti che sono affondati, si faceva a occhi bendati, per concentrare l’attenzione sulla percezione della forza contestualmente esercitata (ovvero del *peso* percepito): per esempio, chiedendo ai bambini bendati di indovinare *quando* il corpo affondato comincia a emergere e *quando* è emerso definitivamente.
Conviene proporre questo genere di attività con oggetti molto voluminosi, in modo da far percepire chiaramente il contributo dovuto alla forza esercitata dall’acqua.
Le questioni affrontate con i piccoli riemergono anche in un lavoro strutturato con i più grandi, in cui ci si spinge anche verso un diverso livello di formalizzazione, con una particolare attenzione all’idea di relazione tra grandezze e proporzionalità, nonché ad aspetti legati alle operazioni di misura (si veda nella sezione *Stralci*).

Commenti
In questa sezione riportiamo alcune considerazioni che sono emerse quando abbiamo ripensato alle esperienze condotte in classe, discutendone insieme.

Quali opportunità ci offre il galleggiamento
Lavorare intorno ai problemi di galleggiamento è un invito a condurre attività in cui si tiene conto del ruolo giocato da molte variabili collegate e stabilisce la possibilità di argomentare in maniera articolata intorno a questioni fenomenologiche. I bambini devono vedere più cose contemporaneamente e correlarle, cercando di mettere in evidenza quale variabile (e in che termini) conta per dare ragione dei fatti osservati, operati, descritti: il peso sì, ma non basta, la forma sì, ma non basta, il materiale sì, ma non basta, il volume sì, ma non basta e così via.
Sicuramente i bambini sono orientati a ordinare (per una variabile, specialmente per peso e per grandezza) e classificare (individuando certe proprietà: per esempio il materiale).
Ma si rendono (si devono rendere) anche conto del fatto che nessuna di queste operazioni è esaustiva, mentre è necessario stabilire collegamenti tra i fatti.
In particolare, il collegamento con il *fare-forza* (che di solito viene fatto in maniera molto riduttiva) può essere affrontato già all'inizio di un percorso che interessi il galleggiamento: è importante che i bambini inizino a farsi un'idea di come funzionano le cose e come sono collegate, anche a livelli scolari molto bassi.
Infatti, seppure il galleggiamento venga ordinariamente affrontato a scuola, lo si fa in maniera riduttiva e non soddisfacente e, soprattutto, non viene inquadrato in un problema più generale di modellizzazione fisica. Per questo è stato invece interessante legarlo al *fare-forza*, indipendentemente dall'ordine in cui nel percorso le cose venivano affrontate: è fondamentale avere in testa un filo da sviluppare, in cui però la sequenza delle attività non è necessariamente fissata ed è comunque flessibile a seguire possibili sviluppi, pur essendo orientata a raggiungere determinati obiettivi; le esperienze vanno approfondite e riprese, riorganizzate, sviluppate nel corso degli anni. Inoltre, il trattare una questione in un modo che tiene conto di aspetti generali relativi al problema di elaborare modelli ci permette di mettere insieme fatti e stabilire analogie (per esempio il fatto che anche l'aria fa forza, come l'acqua; oppure, come è successo nel caso della scuola secondaria, individuando aspetti formali comuni alla modellizzazione di diversi

aspetti fenomenologici: in quel caso infatti, l'uso della rappresentazione grafica sul piano cartesiano, che ha di fatto permesso di caratterizzare i sistemi *per peso specifico*, era stata mutuata da quanto già fatto nel caso di problemi di cinematica, in cui la corrispondente grandezza caratterizzante era la *velocità*).

Intorno alla conduzione

Nei contesti di lavoro che sono stati proposti, abbiamo scoperto che i ragazzi e i bambini si interessano perché sono parte in causa nel lavoro; l'argomentazione – alla quale sono invitati – allarga il campo della discussione e delle cose esperibili, operando direttamente sugli oggetti, sui sistemi che sono al centro della considerazione.

Ci sembra che il tipo di lavoro che abbiamo proposto richiede a noi adulti e a loro di guardare le cose con attenzione; d'altronde, il campo di esplorazione dei fenomeni non si ferma all'aula o al laboratorio, ma fa riferimento al complesso dell'esperienza, del vissuto dei bambini (per esempio, a quello che succede al mare: forse il mare, in un posto che è interno, diventa un'esperienza desiderata e quindi particolarmente valorizzata).

Quindi, possiamo riconoscere un doppio livello di sviluppo, un doppio canale da valorizzare: con gli stessi bambini, riprendendo le cose dette ed esperite, ridiscutendone, riproponendo problemi, riguardando i fatti evidenziando aspetti alternativi; con gli adulti, che devono ripensare ogni volta al modo in cui le cose sono state discusse, a quali sono state le strade più interessanti, quali gli aspetti meno chiari, costruendo una sempre maggiore consapevolezza dei problemi e delle questioni da affrontare.

A proposito, poi, delle difficoltà che si presentano durante la conduzione del lavoro, ci siamo fermati a riflettere sul fatto che ogni tanto "c'è qualche bambina che, con i suoi interventi, ti impappina, ti fa saltare di palo in frasca", tanto che non si riesce a portare un discorso avanti, benché spesso vengano sollevate questioni interessanti e anche difficili da gestire.

Questo ci sembra un punto importante su cui soffermarsi: nella conduzione del lavoro stiamo provando – da un lato – a confrontarci con un approccio che privilegia la discussione collettiva intorno a una certa questione e in cui la voce di ognuno può portare un contributo significativo, specialmente se chi conduce (l'insegnante) si impegna a fare in modo che queste voci non siano isolate, che ciascuno parli non per dire la sua e basta, ma per rispondere ad altri, per gestire le

contraddizioni, per riconoscere somiglianze e analogie per chiedere spiegazioni, per capire meglio quello che ha detto un altro, per appoggiarsi all'idea di un altro e rielaborarla in autonomia.
Dall'altro lato, chi conduce il lavoro si confronta con la necessità di mantenere un controllo del modo in cui sta procedendo la discussione, della direzione che il percorso sta prendendo, dei concetti e delle strategie operative che si stanno condividendo; soprattutto confrontando quello che sta succedendo in classe con quello che era stato stabilito a priori e con il punto a cui si era supposto di arrivare.
Il problema è, dunque, trovare un equilibrio tra queste due urgenze.
Di primo acchito, ci sembra che la strategia più ragionevole in questi casi sia quella di accogliere le domande e le osservazioni che possono essere utili a proseguire la discussione fruttuosamente e rinviare a un altro momento (o lasciare cadere) le altre; eppure resta il problema di decidere (e deciderlo al momento non è semplice!) cosa è pertinente e cosa non lo è.
Ci sembra che abbiamo qualcosa da imparare, in questa direzione, se ci lasciamo incuriosire dal motivo per cui a quella bambina, in quel momento, mentre si faceva quella operazione e si facevano quelle considerazioni, perché proprio in quelle condizioni le è venuta in mente quella domanda, quella idea.
Non che la risposta a questa domanda vogliamo darla subito, immantinente; ma ci para che un atteggiamento da curiosi apra qualche spiraglio verso alternative non immaginate.
Perché, del resto, ci sono bambini, ragazzi, che dicono cose che sembrano non pertinenti, invece pertinenti lo sono, eccome. Magari ce ne accorgiamo dopo. E poi c'è un altro fatto: abbiamo notato, in alcuni casi, che il gruppo stesso funziona con meccanismi di autoregolazione, per cui l'onere di selezionare quello che è significativo mentre si sta affrontando un problema non è a carico solo dell'insegnante, ma redistribuito fra tutti, se il modo in cui stiamo discutendo è sinceramente dedicato al venire a capo di una certa questione.

Che cosa si fa, che cosa succede

Sono state sperimentate esperienze in cui un lavoro simile è stato proposto a classi di diverso livello, tipicamente in istituti comprensivi: tra l’altro, non ci sembra secondario sottolineare la necessità di avere un dirigente che abbracci l'idea di una sperimentazione di lunga durata e verticale.

Con i piccoli, si pensava che non si sarebbe arrivato a governare la correlazione di tutte le variabili significative nei problemi di galleggiamento; tanto meno l'obiettivo era quello di formulare un modello in cui il peso specifico fosse la variabile significativa per dirimere le questioni fenomenologiche; era però comunque importante che venisse alla luce problematicamente la necessità di considerare molte variabili insieme. Con i bambini (già nella scuola dell'infanzia, perché poi alla primaria si può continuare) volevamo anche lavorare a costruire una abitudine all'osservazione e al ragionamento collettivo.
Una nota sul disegnare. Si è trattato di un modo non solo di esprimere fatti emotivi legati al lavoro: da un lato, il disegno serve ai bambini stessi a organizzare quello di cui hanno discusso e le idee che hanno condiviso con i compagni; oltre a servire anche agli insegnanti, a farsi un'idea di quello che pensano i bambini. Il disegno è anche stato usato come mezzo per guidare la discussione: il bambino racconta quello che ha rappresentato – quello che sembra significativo – invitando gli altri a ragionarci. Gli altri poi ritornano a rifare l'esperienza (o cose analoghe) e a ripensare a quello che succede, o a come operare. Altre volte è la stessa insegnante che problematizza un aspetto esplorato con una profondità non soddisfacente.
Nella scuola dell'infanzia, ogni bambino verbalizza, spiegando il significato del disegno.

Stralci

Parole

La discussione che riportiamo di seguito si è tenuta in una prima elementare. Le insegnanti, in questa sessione di lavoro con la classe, avevano deciso di cominciare a discutere delle "qualità" dell'acqua, prima ancora di affrontare con i bambini questioni inerenti alla costruzione di un modello per il galleggiamento. Il presente stralcio, dunque, non costituisce un contributo ad un aspetto specifico di quel problema. Abbiamo comunque deciso di riportarlo (seppur operando tagli) per diversi motivi.
In primo luogo, ci è sembrato un esempio del carattere divergente che possono assumere le discussioni in classe, quando si decide di mettersi nella condizione di lasciare parlare i bambini. Soprattutto, ci è sembrato un esempio della difficoltà di gestire queste divergenze (ce ne sono tra i diversi fili di discorso che i bambini portano avanti, ma anche tra questi ultimi e quello che noi adulti pensiamo sia il discorso buono).

Del resto nella sezione *Intervista* si fa esplicito riferimento a questo passaggio, in relazione alle difficoltà che abbiamo incontrato nella gestione del lavoro: questo è un altro dei motivi per cui abbiamo riportato il brano in questione.
D'altro canto – e questa è una terza ragione – vi abbiamo scorto *in nuce* quel meccanismo di auto-aggiustamento del discorso (operato dal gruppo) a cui facevamo sopra riferimento, o comunque il tentativo dei bambini di riportare i discorsi costruiti agli elementi formali e concettuali che si stanno contestualmente costruendo (si veda qui il passaggio da *acqua solida*, a *acqua liquida*, a *sasso solido* e lo stesso significato di *solido*, declinato nei termini di *non si muove*).

> *Un'insegnante, dopo aver disposto bottiglie di diverse capacità e vaschette sui banchi al centro del cerchio di bambini, propone di parlare dell'acqua. Introduce chiedendo: "Com'è l'acqua?"*
> Brenda: Scivolosa.
> Daniel: Sono caduto sull'acqua scivolosa e mi sono fatto male alla testa.
> Francesco: L'acqua è liscia.
> Gianmarco: L'acqua è… solida...
> Mattia D.: Sì, è solida!
> *Le insegnanti restano perplesse e interdette sul come proseguire.*
> Giovanni: È solida quando non si muove…
> Daniel: Si muove perché… quando muovo lo zaino… l'acqua nella bottiglia si muove…
> Voci: E a volte bagna lo zaino.
> Alessio: L'acqua del fiume arriva al mare e diventa salata.
> Insegnante: Allora, fatemi capire: l'acqua si muove oppure no?
> Voci: Sì, l'acqua si muove.
> [...]
> Alessio: L'acqua è solida quando è congelata.
> Nunzio: Ma l'acqua ghiacciata con il caldo si scioglie…
> Fatima:…e diventa di nuovo acqua.
> Mattia S.: L'acqua è un liquido.
> Insegnante: Ah, e quali altri liquidi conoscete?
> Julia: Aranciata
> Alessandra: Tè
> Voci: Coca cola! vino! latte! birra! succo! gassosa! gingerino!
> Insegnante: Quali altre qualità ha l'acqua?
> Mattia D.: È dolce.
> Insegnante: In che senso? Ha lo stesso sapore dell'acqua e zucchero?

Mattia D.: Noo!!! Ma…
Mattia S.: Non sa di niente…
Francesca: Si usa il gusto, la bocca…
[...]
Gianmarco: È trasparente.
Insegnante: Che significa trasparente?
Valeria [guardando attraverso una bottiglietta d'acqua]: Si vede quello che ci sta dietro e dentro.
Insegnante: Per favore, Giovannino, vai a prendere dell'acqua nel bagno?
Giovannino: E con che cosa? Con le mani!?
Alessio: Con la bottiglia!
Alessandra: È un liquido!
Insegnante: Perché non si riesce a prendere l'acqua con le mani, come facciamo con le altre cose?
Fatima: Cade a terra!
Insegnante: E allora?
La discussione continua e le insegnanti la orientano verso il riconoscimento del fatto che l'essere "imprendibile" dell'acqua è collegato al non avere una forma definita.
Alessio [commentando una operazione di travaso]: L'acqua si è trasformata.
Mattia D.: Ha preso la forma della vaschetta.
Gianmarco: Prende la forma del contenitore che la contiene.
[...]
Successivamente, l'insegnante presenta ai bambini un sasso e chiede di elencarne le qualità.
Mattia D.: È duro, pesante e rimane sempre così.
Alessio: È solido!

Disegni

Del disegno in figura 3.1 ci sembra interessante evidenziare la coerenza che può caratterizzare le spiegazioni costruite dai bambini: in particolare, come spesso avviene, qui si fa riferimento alla presenza di aria come *motivo* del galleggiare e, in questo stesso quadro, alla considerazione che l'andare a fondo di un'arancia sbucciata possa essere giustificato con il fatto che l'aria sta nella buccia. D'altra parte, questa idea ci proietta verso la possibilità di guardare agli *oggetti* che galleggiano o affondano come sistemi composti da parti (caratterizzate da peso specifico diverso) la cui configurazione in acqua dipende proprio dal modo in cui quelle parti sono composte e dai relativi pesi specifici.

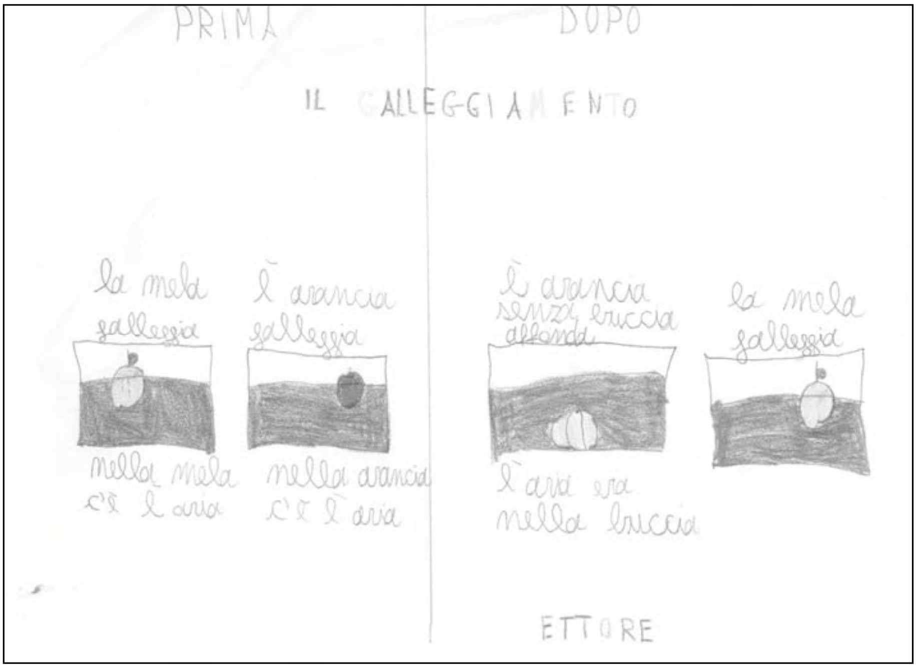


Figura 3.1

Idee e spiegazioni avanzate – nel senso che possono essere chiaramente rilette in termini di quei concetti e quei modi di operare che vogliamo ricostruire quando facciamo educazione scientifica – sono diffuse in molti interventi dei bambini: nel disegno in figura 3.2 per esempio, l'idea di maggiore densità di un oggetto che affonda in acqua, piuttosto che galleggiarvi come un altro, è riconoscibile nell'essere "più stretto di…" (come del resto avviene nel caso di ragazzi più grandi, quando – come riportato nel lavoro con le medie – si dice "più...").
Dei disegni nelle figure 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 sottolineiamo la ricchezza di osservazioni che sono riportate anche da bambini molto piccoli. Evidenziamo l'importanza di riconoscere che molte cose succedono insieme e sono collegate le une con le altre: spingere in basso un pallone che sta galleggiando mentre il livello di acqua si alza, mentre sentiamo una spinta contraria… continuare fino a che l'acqua non esce dal secchio… mentre la cosa che affonda divide l'acqua… così come succede per la bottiglia… che quando galleggia è vuota… o è piena d'aria… e mentre si riempie di acqua va a fondo… ma se la spingi nell'acqua quando è piena solo di aria torna a galla… e l'acqua la spinge come spinge il pallone". A proposito della spinta dell'acqua sul pallone, ci sembra interessante qui soffermarci sul disegno in figura 3.6 in cui

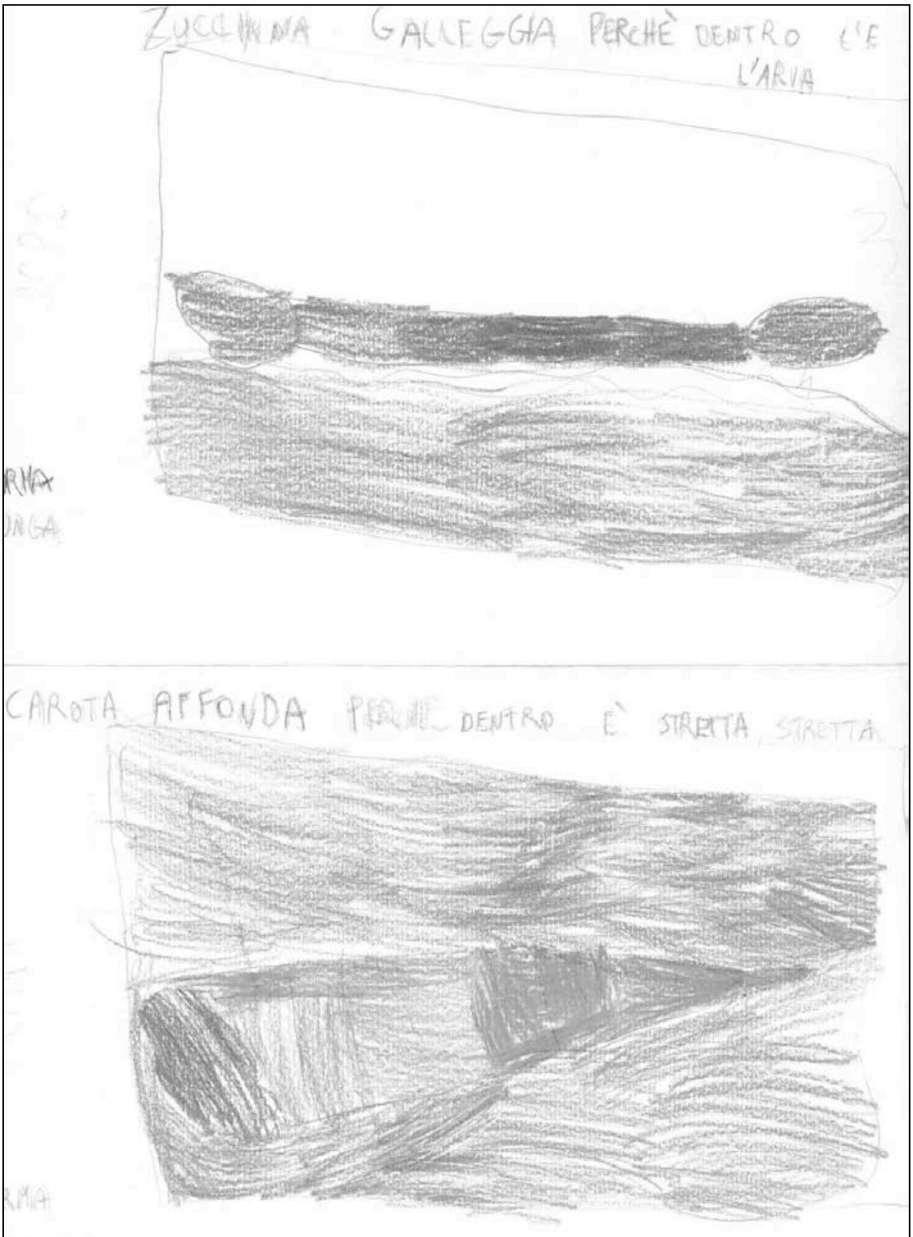


Figura 3.2

un bambino alla ricerca di un modo per rappresentare quella spinta, decide di disegnarla come un mattone, come qualcosa che pesa, nell'acqua. Anche nella sezione *Intervista* si fa riferimento a questa scelta e al relativo problema di rappresentazione (a cui per altro si è già precedentemente accennato).

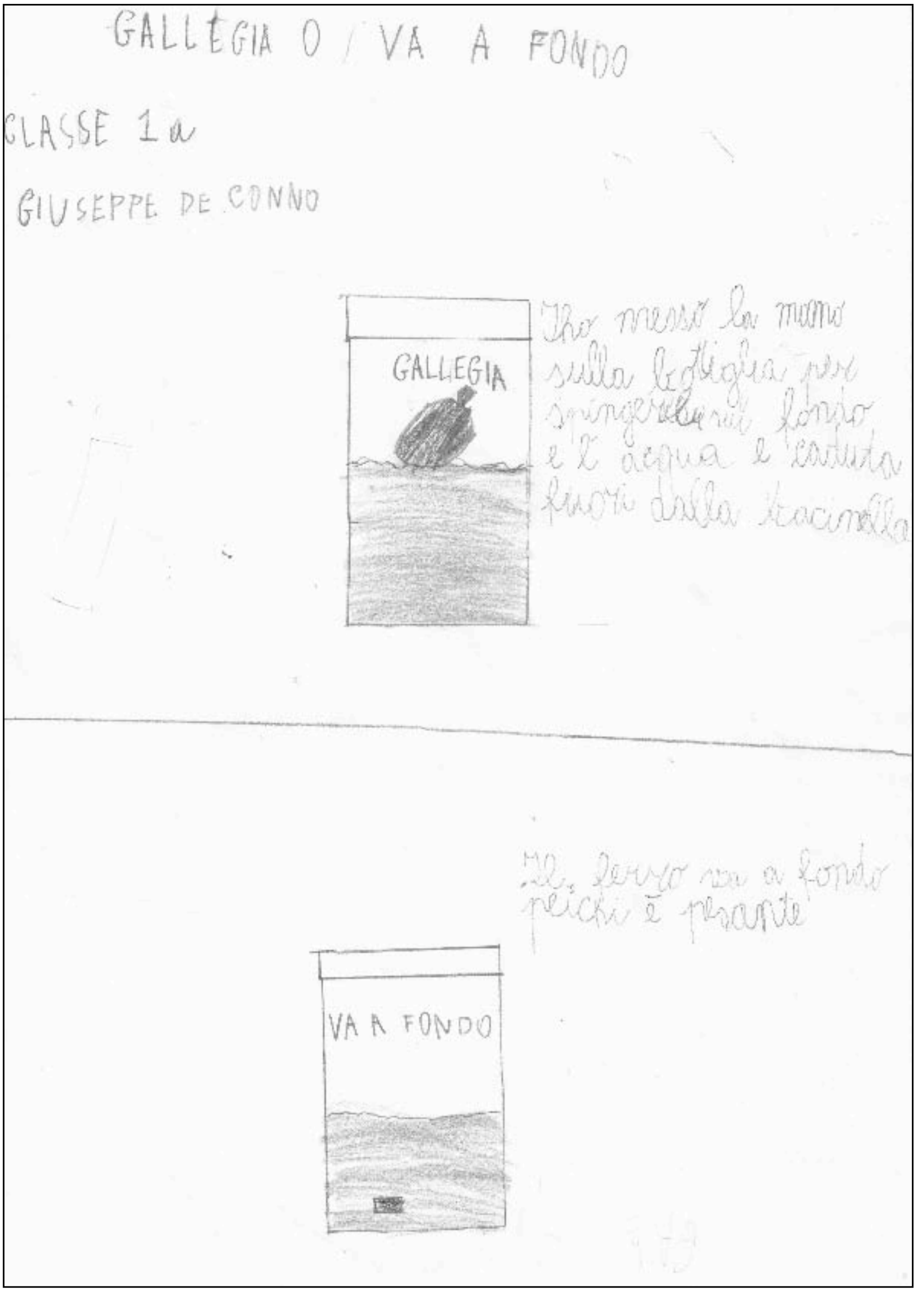

GALLEGIA O / VA A FONDO
CLASSE 1a
GIUSEPPE DE CONNO
GALLEGIA
VA A FONDO

Figura 3.3

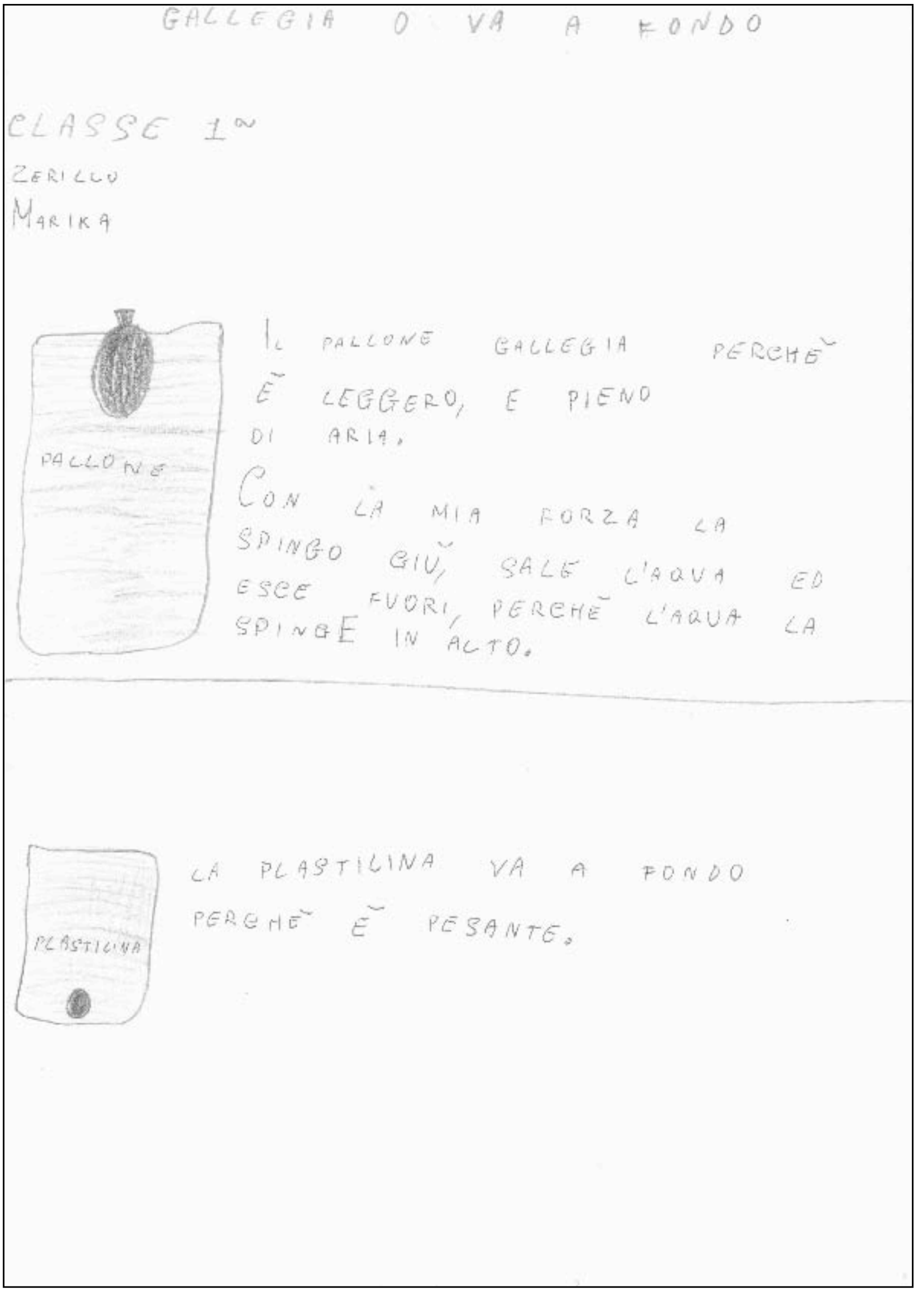
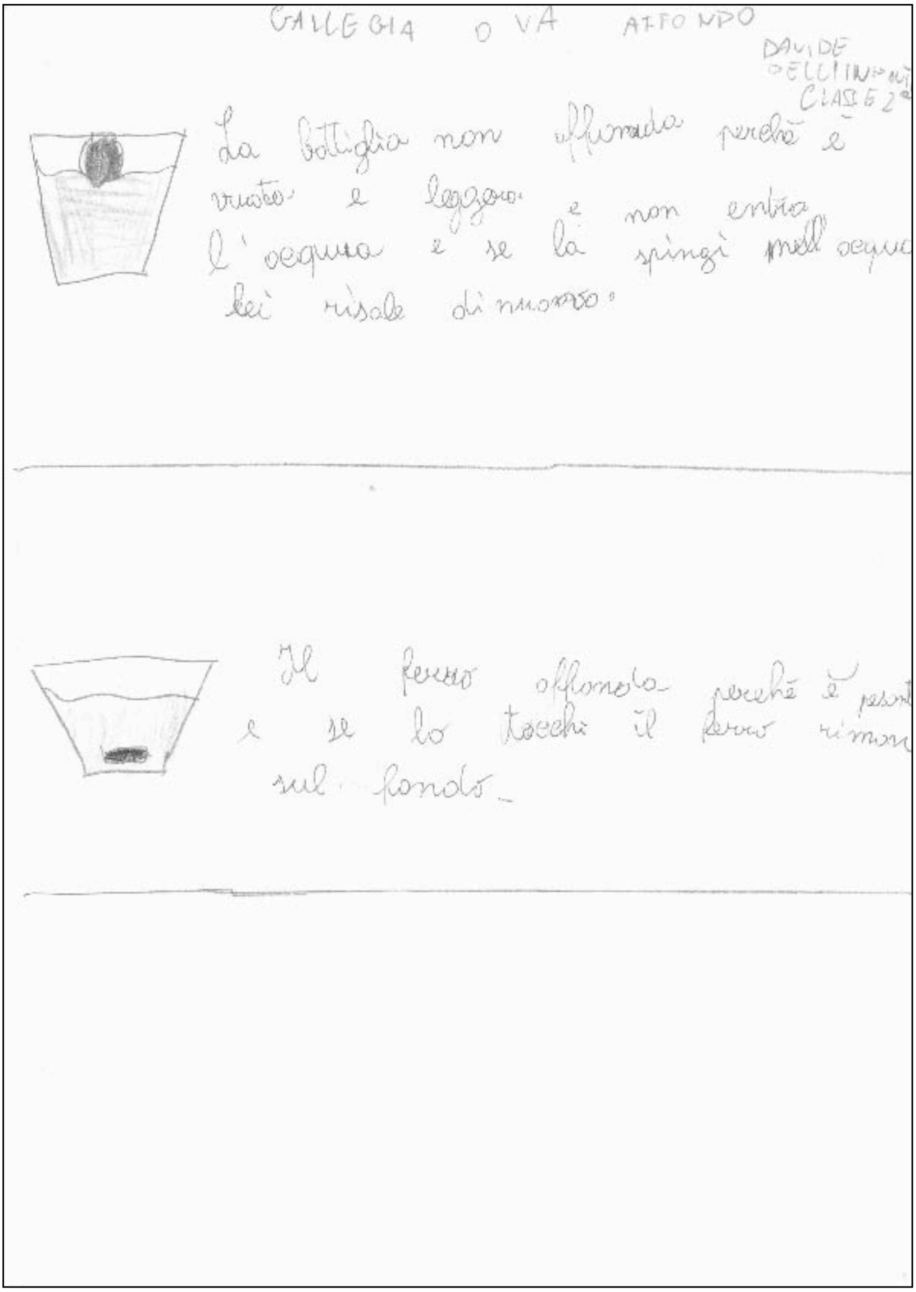

GALLEGIA O VA A FONDO
CLASSE 1ª
ZERILLO
MARIKA
PALLONE
IL PALLONE GALLEGIA PERCHÈ È LEGGERO, E PIENO DI ARIA.
CON LA MIA FORZA LA SPINGO GIÙ, SALE L'AQUA ED ESCE FUORI, PERCHÈ L'AQUA LA SPINGE IN ALTO.
PLASTILINA
LA PLASTILINA VA A FONDO PERCHÈ È PESANTE.

Figura 3.4



GALLEGIA O VA AFFONDO

DAVIDE
DELLINPONTI
CLASSE 2°

La bottiglia non affonda perchè è vuota e leggera e non entra l'acqua e se la spingi nell'acqua lei risale di nuovo.

Il ferro affonda perché è pesante e se lo tocchi il ferro rimane sul fondo.

Figura 3.5

Figura 3.6

Alcuni disegni poi, come quelli delle figure 3.7 e 3.8, servono a sistemare le idee rispetto a certi problemi (si veda il racconto concernente il parallelo tra mais e acqua e le relative figure nella successiva sottosezione).

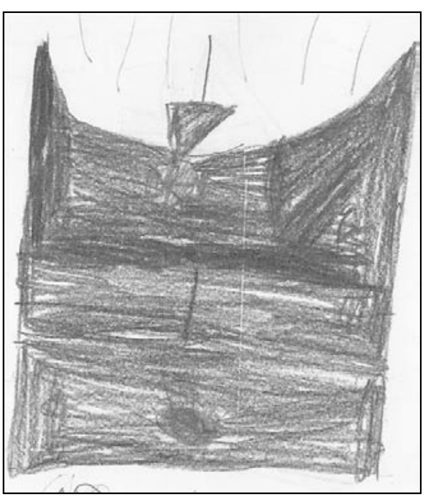
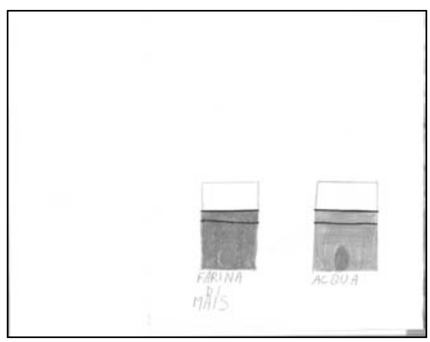


Figura 3.7

Figura 3.8

Operazioni
I bambini non sempre riescono a *vedere* che l'acqua si sposta per far posto all'oggetto immerso, si può proporre perciò la seguente attività: si mette in un bicchiere della farina di mais, si segna il livello, poi vi si fa affondare una pietra e si indica con un pennarello il nuovo livello (foto in basso).
I bambini affermano che "il sasso prende il posto della farina che si sposta per fargli spazio, proprio come l'acqua con il palloncino".
Alla domanda "se sostituisci la farina di mais con l'acqua e metti il sasso che hai immerso nella farina, il livello dell'acqua si alza di più o di meno?", molti bambini rispondono che "il livello si alza di più nel bicchiere con l'acqua perché il sasso va a fondo e perciò pesa di più".
Per superare questa convinzione abbiamo confrontato il comportamento dell'acqua e della farina di mais dopo che vi è stato immerso lo stesso corpo.
I bambini dopo aver condotto l'esperienza, cambiano idea, affermando che il livello dell'acqua e della farina di mais si innalzano allo stesso modo (disegno in basso).



Discussioni
Riportiamo qui di seguito il resoconto di un pezzo di lavoro tenutosi in una seconda classe di scuola secondaria di primo grado. La voce narrante è quella dell'insegnante.

La prima fase ha visto i ragazzi classificare gli oggetti secondo la proprietà di galleggiare.
I ragazzi immergono in acqua gli oggetti (uno per volta) nell'ordine: tappo di sughero, barattolo di vetro, pezzettino di polistirolo, cilindro di ferro, cilindro di legno, barchetta di plastilina, pallina di plastilina etc.

Alla domanda "perché alcuni oggetti galleggiano e altri no?", un gruppetto sostiene che affondano gli oggetti "più grandi". Un altro gruppetto replica che la pallina di plastilina è affondata pur essendo "più piccola" della barca.

> Maria: Affondano quelli più pesanti, perché il cilindro di ferro è affondato mentre quello di legno no.

La maggioranza dei ragazzi afferma che il pezzo di legno galleggia perché il legno è "più leggero" dell'acqua.

> Andrea: Infatti, anche l'arca di Noè non affondò perché era di legno più leggero dell'acqua.
> Giuseppe: Uno dei metodi per spostare i tronchi è di trasportarli sul fiume.
> Adele: Ma un quintale di legno è più pesante di un chilo di acqua, eppure il legno galleggia, mica affonda!
> Voci: Ma il pezzo di ferro non va a fondo perché è più pesante dell'acqua?
> Silvia: Ma un chilo di ferro pesa come un chilo di acqua, perché sempre un chilo è.
> Paola: È come la paglia e il ferro. Cosa pesa di più,un chilo di paglia o un chilo di ferro? Pesano entrambi un chilo!
> Roberto: A me sembra che il ferro è più pesante del legno e il legno è più pesante dell'acqua.
> Federica: Allora perché la nave, che è di ferro, non affonda? Sta a galla anche se pesa moltissimo, mentre, come abbiamo visto, una piccola pallina di plastilina, che pesa poco, affonda.
> Voci: Perché nella nave ci sono spazi vuoti, non è tutto ferro…
> Davide S.: Però è grandissima.

A questo punto i ragazzi, un po' disorientati, restano in silenzio. Dopo qualche attimo di riflessione…

> Davide: Solo se li prendo uguali… grandi uguali… della stessa quantità…
> Voci: Cosa?
> Davide: Gli oggetti che immergiamo
> Voci: Già! Esatto! Giusto!
> Giuseppe: Allora non dobbiamo pensare a cosa pesa di più ma a cosa è più grande?

I ragazzi non sanno cosa rispondere. A questo punto cerco di stimolarli ad individuare le variabili che determinano il galleggiamento.
Tutti concordano che bisogna tener presente il peso, il volume e la forma dell'oggetto.
Penso allora di proporre una classificazione degli oggetti in base al peso. Prendiamo in considerazione: corteccia (100 g) e bullone (100 g); pallina (25 g) e gomma dura (25 g); barchetta di plastilina (200 g) e pallina di plastilina (200 g).
Chiedo*:* "il fatto di galleggiare dipende dal peso dell'oggetto?"

Voci: No!
Silvia: Pur avendo la corteccia e l'oggetto di ferro lo stesso peso, il legno galleggia ma il ferro è affondato.
Aurora: Anche per la barchetta e la pallina di plastilina è successa la stessa cosa, la barchetta non è affondata, eppure pesava quanto la pallina.
Davide: In questo caso sono pure dello stesso materiale.
Voci: Allora il peso non c'entra niente. Non è detto che due cose che hanno lo stesso peso si comportano allo stesso modo. Se dipendesse dal peso, tutti gli oggetti considerati si comporterebbero allo stesso modo.
Francesco: Ma, non dovrebbe affondare l'oggetto più grande?
Voci: Perché? Il pezzo di legno è affondato? Eppure ci sembra più grande di quello di ferro. Il ferro non galleggia perché è formato da un materiale diverso dal legno.

Propongo altre situazioni: oggetti che hanno stessa forma, sono di diverso materiale e hanno diverso peso (cilindro di ferro e cilindro di legno; bicchiere di ceramica e bicchiere di plastica; barretta di polistirolo e barretta di legno; cerchio di ceramica, cerchio di legno e cerchio di plastica; contenitore della sorpresa di un ovetto di cioccolata vuoto e contenete una biglia).

Andrea: Il cilindro di ferro è più "lasco" di quello di legno della stessa dimensione, per questo il primo è affondato mentre il secondo no.
Roberto: È vero. perché anche nel caso dei bicchieri, pure essendo della stessa grandezza, affonda solo quello di ceramica.
Voci: Allora dipende da cosa sono fatti gli oggetti!
Federica: Infatti il cerchietto di ceramica affonda, quello di legno e quello di plastica galleggiano
Davide: È vero, dipende se è plastica, legno, ferro, vetro o altro.
Voci: Dipende dal materiale!

Proviamo allora con oggetti caratterizzati dall'essere tutti dello stesso materiale (tre contenitori di plastica di diversa misura; due pezzi di legno di diversa forma; due pezzi di plastilina modellati diversamente).

> Voci: I tre contenitori di plastica, dello stesso materiale, galleggiano anche se sono di dimensioni diverse.
> Silvia: Allora perché la barchetta galleggia e la pallina affonda se sono entrambi fatti di plastilina?
> Voci: Sempre la pallina e la barchetta di plastilina si trovano in mezzo!

Penso di essere ritornata al punto di partenza! Per fortuna interviene Adele.

> Adele: Bisogna guardare il volume in relazione al peso; la barchetta sposta una quantità d'acqua maggiore rispetto alla pallina perché ha una forma diversa.
> Paola: La quantità d'acqua spostata è maggiore quanto maggiori sono le dimensioni.
> Voci: Allora, bisogna sapere quanto è grande e quanto pesa l'oggetto!
> Roberto: E quanta acqua sposta.

A questo punto decido di iniziare a porre le basi per arrivare a una definizione di peso specifico. Ma i ragazzi mi chiedono…

> Voci: Questo è vero per le cose, ma… per esempio per l'olio e l'acqua come funziona? L'olio galleggia sull'acqua anche se è più pesante, perché è più denso.
> Aurora: Pesiamo un bicchiere di olio e uno di acqua…
> Voci: L'acqua pesa meno dell'olio!

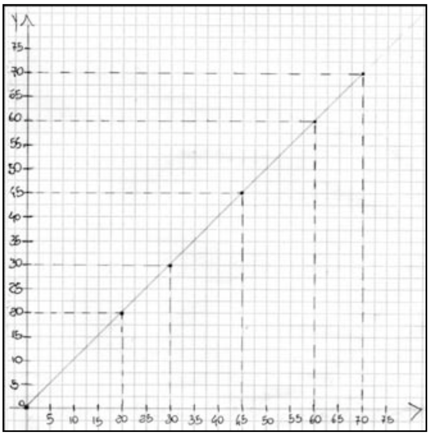
Dico*:* "L'olio galleggia sull'acqua non perché pesa meno di questa, infatti un bicchiere d'acqua pesa meno di un litro di olio, eppure l'acqua va a fondo". Chiedo loro: "Cosa distingue l'acqua dall'olio?"

> Voci: Abbiamo visto che i termini "più leggero" e "più pesante" non sono corretti. L'olio ha qualcosa minore dell'acqua. È come per gli oggetti che abbiamo immerso finora in acqua.

A questo punto propongo ai ragazzi di dividersi in gruppi. Mi chiedono di formarli da soli e con stupore noto che si sono divisi in due gruppi: da una parte i maschi, dall'altra le femmine.
Inizialmente propongo loro di effettuare delle misure di volume e di peso di alcune sostanze. La scelta ricade su acqua, alcool e olio. I gruppi si mettono al lavoro effettuando tutte le misurazioni, tabulando e rappresentando graficamente i risultati.
Di seguito si riporta il solo caso dell'acqua, a titolo di esempio.

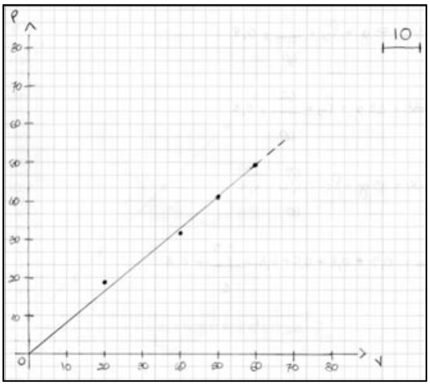
Volume (ml)	Peso (g)	Ps (ml/g)
20	20	1
30	30	1
45	45	1
60	60	1
70	70	1

Gruppo formato dai ragazzi (Acqua)



Volume (ml)	Peso (g)	Ps (ml/g)
20	18	0.9
40	33	0.8
50	42	0.8
60	49	0.8

Gruppo formato dalle ragazze (Alcool)



Interpretiamo i dati (relazione fra le variabili peso e volume). I due gruppi concludono entrambi che considerando volumi crescenti, è evidente che il loro peso è aumentato; ma dividendo il peso di ciascun campione per il proprio volume, si sono accorti che il risultato è sempre

lo stesso. I valori ottenuti sono costanti per ciascuna sostanza, ma diversi da sostanza a sostanza. Esiste una grandezza che resta uguale per ogni peso e per ogni volume: il peso specifico.
La maggioranza della classe ha individuato la relazione di proporzionalità diretta esistente tra le due grandezze e la relativa costante in tutti e tre i casi (anche perché questo argomento già precedentemente è stato affrontato nelle lezioni di matematica).

> Voci: Confrontando il valore costante di ogni sostanza, cioè il peso specifico, è possibile prevedere chi sta sopra e chi sta sotto: l'olio si posiziona sopra l'acqua perché ha un peso specifico minore.
> Davide: Questo vale anche per gli oggetti immersi nell'acqua, quindi la condizione di galleggiamento o di affondamento di un corpo dipende dal peso specifico del corpo e dal peso specifico del liquido in cui il corpo è immerso.
> Voci: Un oggetto galleggia se il suo peso specifico è minore di quello dell'acqua, affonda se è maggiore.
> Roberto: Ma può essere che l'oggetto sta a metà.
> Andrea: Allora si trova in equilibrio, hanno lo stesso valore…, cioè lo stesso peso specifico. E' vero?
> Voci: Sì!
> Giuseppe: Ma… come troviamo il peso specifico degli oggetti?
> Voci: Misuriamo il peso e il volume, e poi…
> Federica: Il peso con la bilancia, ma per il volume di una pallina come fai a misurarlo?

Li porto a riflettere su un'operazione fatta l'anno precedente per calcolare il volume degli oggetti. I ragazzi allora propongono di immergere un oggetto in acqua per vedere di quanto si innalza il suo livello.

> Simona: Ma il contenitore non è graduato…
> Pasqualino: Come facciamo?
> Silvia: Professoressa, si può fare?

Devo venire in aiuto ai ragazzi. Ma come? Propongo di mettere un recipiente sotto il contenitore (pieno fino all'orlo) in modo che l'acqua possa traboccare quando immergiamo la pallina. I ragazzi raccolgono l'acqua traboccata con una siringa e leggono il volume. Conoscendo il peso e il volume della pallina i ragazzi con un semplice calcolo trovano il suo peso specifico.

Andrea: Professoressa, si può misurare la forza dell'acqua? Cioè la spinta?
Federica: Quanto deve spingere per far galleggiare le cose.

Mi deve venire in mente qualcosa nota ai ragazzi. Penso a qualcosa da spingere in acqua che risalga velocemente, persino uscendo dall'acqua: sì, il pallone che avevo portato e non ancora usato! Invito i ragazzi a riflettere: "pensate a qualche gioco in acqua".
Dopo pochi secondi…

Emanuele: Sì! Il pallone, quando giochiamo al mare.
Paola: Ci sediamo sopra, lo spingiamo giù forte, risale sempre, viene spinto.
Davide: Possiamo provare?

Chiedo di portare un secchio d'acqua. Si può procedere. Adele si presta a fare la prova.

Voci: Spinge, spinge… Schizza come un missile!
Andrea: Quando andiamo in acqua al mare, però, sembra che diventiamo più leggeri, mica pesiamo davvero di meno?…
Aurora: È l'acqua che si fa carico di una parte del nostro peso.
Davide: L'acqua si apre per farci entrare.
Adele: L'acqua che viene spostata ha un peso.
Silvia: La quantità d'acqua che si sposta deve essere uguale al nostro peso, altrimenti affonderemmo.
Andrea: Se uno pesa quaranta chili, per galleggiare deve fare un volume di acqua che pesa quaranta chili. Se ce la fa, galleggia, altrimenti affonda.
Roberto: Allora possiamo pesare l'acqua che si sposta per vedere quanto spinge?

Decido di prendere il dinamometro nell'armadietto e chiedo ai ragazzi di misurare il peso di 4 pesetti. Lettura dinamometro: 100 g.
Poi faccio immergere i pesetti in acqua e chiedo: "La forza peso in acqua sarà maggiore, minore o uguale al valore precedentemente trovato con il dinamometro?"

Voci: È minore!

Ovviamente risulta minore. Chiedo: "Perché il dinamometro segna un valore minore? E' forse diminuito il peso del corpo?"

Voci: Non è diminuito il peso, ma, la spinta dell'acqua è la causa del nuovo valore indicato dal dinamometro.

Li lascio riflettere per vedere cosa diranno (peso dei pesetti fuori dell'acqua = 100 g; peso dei pesetti in acqua = 80 g)

Voci: La differenza tra le pesate è di 20 g. La differenza è dovuta alla spinta dell'acqua.
Davide: Pesiamo l'acqua?
Noemi: Come facciamo a vedere quanto pesa l'acqua spostata?
Davide: La possiamo pesare con la bilancia.
Voci: L'acqua pesa 20 g, è uguale alla differenza dei pesi, è la spinta! La spinta verso l'alto che ricevono i pesetti dall'acqua.
Silvia: La spinta è uguale al peso dell'acqua spostata dai pesetti.
Voci: Il galleggiamento di un corpo dipende non solo dal suo peso, ma anche dal volume di liquido spostato.
Andrea: Pesano uguale… La spinta ricevuta è uguale al peso della quantità d'acqua spostata.
Voci: Fin quando l'acqua spostata ha un peso uguale a quello dell'oggetto immerso, questo rimane a galla, altrimenti affonda.

Ci fermiamo, ma l'interesse per l'argomento è ancora vivo. Anche perché ci sono state altre questioni sollevate…

Andrea: Secondo me la spinta non viene solo dal basso, ma anche dai lati, altrimenti l'oggetto si capovolgerebbe.

Intervista

Dopo avere condiviso racconti e idee in merito al lavoro condotto, la riflessione è continuata nella forma di una intervista, che di seguito riportiamo.

Ciro (intervistatore): Quali sono le principali difficoltà con cui vi siete dovute confrontare durante il lavoro?
Rossana: La principale difficoltà è stata quella di come porre il problema ai bambini, perché erano piccoli, perché mi trovavo in un nuovo ambiente, li vedevo impacciati, non erano abituati a osservare, a riflettere… erano bambini di tre anni. Già quando tu hai spiegato il *fare-forza*, ho pensato: "secondo me non otterrò alcun risultato". Invece non

è stato così. Mi sono ricordata l'esercizio che avevo già fatto: spingere il muro, far scaricare :Così ho detto ai bambini "adesso proviamo a spingere il muro e vediamo se siamo capaci di spostarlo". Quindi ho cominciato a intervistare i bambini: "sei riuscito a spostare il muro?… secondo te ci riesci? ". Qualcuno mi ha risposto "è molto duro!", Un altro mi ha detto "maestra, ma io non ce la faccio perché sono piccolo, ci vuole molta forza"… Le risposte mi hanno entusiasmata perché ho visto che i bambini erano stati stimolati e cercavano di rispondermi.

Ciro: E quindi si può dire che per te la difficoltà era…

Rossana: Pensavo che forse era difficile questo argomento per loro, perché erano troppo piccoli e perché venivano da un contesto sociale dove non avevano ricevuto molti stimoli.

Ciro: Ma tu… diciamo…, questo tipo di consapevolezza su di loro, da dove la prendevi ?

Rossana: E te l'ho detto, perché li stavo conoscendo, quei bambini. Vedevo che non rispondevano ad altre cose, insomma… ad altre proposte. Però con questo esperimento mi sono incoraggiata .Ho apprezzato le risposte dei bambini e mi sono detta: "posso lavorare, posso tirare fuori da loro qualcosa, insomma..."

Anna: La mia maggiore difficoltà è stata l'avvio del laboratorio scientifico, non sapevo da che parte cominciare. Per questo la collega Angela Follo ed io abbiamo deciso di programmare e gestire gli interventi sulle due classi prime, insieme. Per dovere di cronaca, occorre dire che le due classi, dal punto di vista disciplinare e non solo, sono abbastanza agitate e diversificate e, quindi, difficili da controllare e coinvolgere nelle attività didattiche. Dividendoci i compiti – io e la collega – siamo riuscite ad ottenere sia dei risultati dal punto di vista dell'attenzione, che sono stati abbastanza buoni, e sia dal punto di vista dell'interesse. La metodologia scientifica del laboratorio è scaturita dalle osservazioni dei bambini, dal loro fare ipotesi e dalla verifica con la realizzazione di semplici esperimenti. Va detto, però, che i tempi di attenzione del gruppo allargato sono variati a seconda della parte della giornata interessata (prima mattina e tarda mattinata).

Ciro: Ma invece tu facevi riferimento, all'inizio, a una tua difficoltà a confrontarti con certi contenuti.

Anna: Essendo questo anno insegnante unica e avendo personali attitudini per le materie umanistiche, io non nascondo la mia difficoltà ad insegnare la matematica e le scienze; tuttavia, sono sempre pronta ad un confronto costruttivo con la collega per programmare e operare anche in un ambito in cui non mi sento molto sicura.

Ciro: trovi che la tua organizzazione mentale rispetto ai problemi è diversa rispetto a prima?
Anna: Sì.
Ciro: In che senso, ce lo puoi spiegare?
Anna: Allora, prima non sapevo da che parte cominciare. Tanti erano i dubbi su quale e come progettare il percorso da seguire per guidare i bambini a scoprire l'elemento acqua. Ritenevo che con i bambini di prima fosse ancora presto parlare di ipotesi e di esperimenti e soprattutto come fare per far si che essi fossero i veri protagonisti della conoscenza.
Ciro: Come gli avete posto il problema?
Angela: proposto il tema, siamo partite dalle conoscenze pregresse dei bambini, fingendo di essere noi stesse dei bambini che partecipano alla discussione del circle time tra pari.
Ciro: Vi posso fare una domanda? Che cosa ha significato per voi "fingere di essere bambini"?
Angela: Noi non abbiamo dato alcuna definizione già confezionata ai bambini, hanno parlato loro. L'unica cosa a cui facevamo attenzione era quella di stare sempre sul tema e, non come a volte è capitato, raccontando le proprie esperienze, si perdeva di vista l'obiettivo.
Anna: Noi…
Ciro: Scusate se vi fermo. Voi adesso state raccontando quello che avete fatto, ma io voglio richiamarvi sulla domanda iniziale. Cercate di individuare un momento specifico, in cui avete avuto una difficoltà specifica.
Angela: Un punto preciso è stato quando abbiamo fatto questa domanda: "per voi, bambini, com'è l'acqua?" All'inizio i bambini hanno risposto elencando le qualità dell'acqua (avevamo fatto da poco anche in italiano le qualità): alcuni di loro hanno risposto: "maestra, l'acqua è solida". Noi insegnanti, invece, avendo delineato a grosse maglie un minimo di percorso, eravamo sicure che sarebbe venuto fuori lo stato dell'acqua più ovvio, quello liquido. I due bambini, invece hanno esordito: "maestra l'acqua è solida". Avendo deciso di non dare definizioni già confezionate e di intervenire il meno possibile nel percorso intrapreso dai bambini… ci siamo guardate in faccia : "E adesso come facciamo?"
Anna: Noi prima avevamo dato delle schede da compilare, in cui si affrontava il tema dell'acqua. Quindi per me era naturale che loro dicessero che l'acqua era un liquido; e invece no!
Ciro: Ma che genere di difficoltà...?

Angela: Penso che la difficoltà maggiore è stata condurre in modo discreto il gruppo, senza interventi declamatori e definitivi, per far venire fuori dai bambini quel loro ragionare, fondamentale nel percorso di scoperta delle cose che ci circondano.
Ritornando all'esperienza, io non ho detto niente. Loro hanno detto "l'acqua è solida!" E adesso come faccio a riportarli al punto del percorso da noi programmato dove si dava per scontato che l'acqua è un liquido?... Mentre pensavo al da farsi è intervenuto Giovannino e ha detto: "l'acqua è solida quando non si muove". Poi è intervenuta un'altra bambina: "sì, io la riesco a muovere, nella bottiglina che ho nello zaino, muovo lo zaino, si muove, poi esce e mi bagna i libri".
Anna: E che poi da lì è scaturito che l'acqua è solida quando è ghiacciata, quindi dopo ci sono arrivati da soli.
Angela: L'unica difficoltà, forse, l'ho gestita non intervenendo e aspettando che qualcosa succedesse tra di loro. E così è stato.
Patrizia: La mia difficoltà maggiore è stata nella gestione del gruppo. Io ho cercato di instaurare in classe – una prima – un clima favorevole agli scambi comunicativi, a far condividere agli alunni le esperienze e a confrontarsi su di esse, ma non sempre ci sono riuscita. Secondo me i bambini non sono abituati ad osservare e a riflettere. Sono molto veloci, vogliono continuamente nuovi input. Quindi c'era il bambino che era attento e faceva delle osservazioni che io dovevo rendere significative; però magari c'erano altri bambini che in quel momento non si sentivano coinvolti e non riuscivo a continuare o ad approfondire il discorso.
Ciro: Non ci riuscivi perché avevi difficoltà a stare concentrata su quello che ciascuno diceva?
Patrizia: No, per esempio, quando abbiamo immerso il palloncino nel secchio con l'acqua, un bambino ha esclamato: "l'acqua si sposta, per far posto all'acqua…" e io volevo continuare questo discorso, tipo chiedendo "ma secondo te l'acqua si accorge che c'è il palloncino?". Però mentre lui era ricettivo, c'erano altri bambini che non lo erano e non sono riuscita a far arrivare a tutto il gruppo questa scoperta.
Ciro: Il tuo problema era quello di riportare l'istanza di uno a tutto il gruppo. E questa difficoltà a cosa la adduci?
Patrizia: Io penso che sia dovuta al fatto che nella mia classe ci sono bambini con particolari difficoltà di comportamento…
Ciro: Ma tu credi che sia un fatto contingente della tua classe o che sia qualcosa che riguarda in generale il modo di…
Patrizia: Allora, questi bambini, che hanno particolari difficoltà hanno reagito a queste attività in modo negativo, è stato peggio di quando

propongo loro gli usuali esercizi, forse perché hanno difficoltà a mantenere l'attenzione e a rispettare i turni degli interventi. Poi ci sono anche altri alunni abbastanza vivaci...
Ciro: Ma tu pensi che riguardi solo la tua classe?...
Patrizia: Io penso che riguardi un po' tutti.
Angela: Anche nel nostro gruppo allargato, formato da due classi, la partecipazione non è stata allo stesso modo, nello stesso tempo, e di tutti i bambini. Ci sono alcuni bambini che sono stati attenti, e hanno dato il loro contributo, ma altri hanno incontrato delle difficoltà a seguire. Però ho notato che, facendo la rappresentazione grafica in un tempo diverso dalla discussione e osservazione degli esperimenti, comunque, quei bambini che si erano distratti, avevano assimilato una parte anche se in modo discontinuo e minima.
Ciro: Di questo ne parliamo magari dopo, adesso concentriamoci sull'oggetto della domanda.
Patrizia: Adesso, con l'insegnante unico, con la riduzione del personale, ci sono meno momenti di compresenza. Anzi ce ne sono pochissimi. Queste attività andrebbero svolte quando ci sono per lo meno due persone, un' insegnante conduce il lavoro e un'altra ricopre il ruolo dell'osservatore, in modo che possa darti dei suggerimenti, aiutarti…
[Ciro invita altre persone a intervenire]
Angelina: Momenti di difficoltà?... forse a volte dai ragazzi mi aspettavo determinate risposte.
Ciro: Ci puoi chiarire?
Angelina: Andavo con un piano prestabilito che il più delle volte non era possibile seguire... ma forse è meglio così.
Ciro: E che ti succedeva in quei momenti?
Angelina: Ad esempio, ricordi quella volta di cui ti parlai del ragazzo che usava l'espressione "è lasco", riferendosi al peso specifico? Io non mi aspettavo quella risposta che però mi ha fatto riflettere. Capire i fenomeni e saperli esprimere implica anche una competenza comunicativa. Nel condurre l'esperimento, ho cercato comunque di intervenire il meno possibile: volevo che i ragazzi facessero tutto da soli. Ma alla fine mi sono resa conto di quanto fosse difficile ottenere le tanto desiderate risposte. Forse la mia attenzione era tutta rivolta a quella tabella, a quel grafico, gli unici strumenti che potevano permettere ai ragazzi di notare la somiglianza del peso specifico con la velocità precedentemente trattata e rappresentata graficamente. Quello è stato un pò il mio pallino. Io ho dato, però, anche una interpretazione diversa alla

domanda che ci hai rivolto: ho riflettuto sulle difficoltà di questo corso, per me, un po' ripetitivo e monotono.

Ciro: Sono d'accordo con te sul fatto che si è tornato molto frequentemente su certi argomenti, ma credo che è una cosa nata sulla presa di coscienza di che cosa era passato e che cosa non era passato e quindi anche delle esigenze di rinforzare alcuni concetti chiave.

Angelina: Una mia sensazione, eh!..Questo ci tengo a precisarlo! Ma comunque mi ha aiutato a rivalutare meglio cose che, per esempio, davo per scontate. E poi, mi è servito ad integrarmi nel gruppo, anche se i docenti di matematica per la scuola secondaria di primo grado con cui potermi confrontare erano pochi.

Ciro: Perché tu sei laureata in matematica...

Angelina: No, in geologia, ma questi sono argomenti che mi appassionano e che mi piacciono. Ma tornando al discorso di prima io penso che questo corso mi abbia aiutato a capire che ad ogni argomento bisogna dedicare il tempo necessario: nulla è scontato! Inoltre l'esperienza ha avuto la sua importanza anche per quanto riguarda la gestione del gruppo classe, soprattutto per quanto riguarda il coordinamento dei ragazzi.

Patrizia: *[...]* Poi, per quanto riguarda i bambini, penso che non sono abituati ad ascoltarsi. Tornando al discorso di prima, quando parla un bambino, gli altri non sempre reputano interessante quello che sta dicendo il compagno.

Ciro: Allora rigiro a tutti la domanda: qual è il ruolo nostro in questa situazione? O meglio, il ruolo lo sappiamo; più che altro *come si fa?*

Patrizia: Valorizzare ogni intervento, in modo che il gruppo reputi importante, significativo ciò che dice quel bambino.

Rossana: L'esperimento del galleggiamento io l'ho fatto l'anno scorso con i bambini che avevano tre anni e l'ho ripetuto quest'anno e ho notato che i bambini erano interessati: prendevano oggetti e fra loro dicevano: "vuoi vedere che questo galleggia? Vuoi vedere che questo affonda? Perché si sentivano sicuri più sicuri, dopo l'esercizio precedente.

Orsola: La mia difficoltà è stata quella di coinvolgere i bambini più vivaci, quelli che si presentavano meno attenti infatti rispondevano a caso, senza riflettere.

Ciro *[rivolto ad Angelina]:* Tu volevi dire qualcosa…

Angelina: Si, volevo fare una precisazione sulla mia affermazione precedente: l'esperienza nel gruppo mi ha fatto capire che non bisogna dare per scontate le nozioni più elementari, ma è proprio da quelle che bisogna partire, insistendo fino a quando non vengono assimilate da tutti. Ecco cosa intendevo dicendo che per me era un po' ripetitivo: si insisteva molto sulle nozioni elementari che, per me, erano ovvie, ma magari per gli altri docenti non lo erano.

Ciro: Quindi se capisco bene, tu ti sei servita delle cose che sono successe al gruppo di adulti, come dinamiche che ti sono servite ad aggiustare il modo di condurre il lavoro in classe.

Angelina: Sì, proprio così. Anche per i ragazzi vale lo stesso discorso: non bisogna trascurare le nozioni elementari e, soprattutto, bisogna essere certi che vengano assimilate da tutti. Mi sono resa conto che bisogna dedicare più tempo alle scienze e non solo alla matematica: spesso nel campo delle scienze tante sono le cose che consideriamo ovvie, mentre nel campo della matematica, da sempre più ostica agli occhi di tutti, ci impegniamo molto di più anche nelle cose più semplici.

Ciro: E cosa cambia nella tua percezione rispetto a…, in che senso tu dici che non sono "più semplici"; se capisco bene tu dici che adesso vedi che ci sono delle altre difficoltà, che magari prima riconoscevi in matematica. Quali sono le difficoltà che tu ora riconosci nell'affrontare un argomento di scienze?

Angelina: Beh, non sono proprio delle difficoltà: ho appreso semplicemente che bisogna soffermarsi di più sui quei concetti che a noi docenti sembrano di facile intuizione, semplici… magari per i ragazzi non è così.

Ciro: Quindi è cambiato il modo in cui insegni…

Angelina: Non ho cambiato il mio modo di insegnare, ho semplicemente cercato di dedicare più tempo ai lavori di gruppo. Un esempio per rendere meglio l'idea può essere il lavoro sul galleggiamento svolto con i ragazzi: abbiamo dedicato all'esperimento ben cinque incontri di ben due ore ognuno. Ovviamente non si può sempre dedicare il tempo che si vuole alle cose: spesso, come nel caso della chimica, è necessario soffermarsi solo ai concetti base, altrimenti si dovrebbe dedicare l'intero anno scolastico solo all'approfondimento della chimica.

Patrizia: Io penso che l'insegnante approfondisce un argomento, dà un modo di pensare: fa scoprire al bambino come si può guardare la realtà. L'importante è dare un metodo, un modo di vedere le cose. E poi, un'altra difficoltà che ho avuto è che il galleggiamento è complicato; allora, tu che sei laureata in geologia e hai fatto gli esami di fisica, hai una preparazione maggiore di noi, che abbiamo frequentato il magistrale e fisica l'abbiamo fatta in modo superficiale. Veramente è stato un grande sforzo vedere tutte le variabili…

Angelina: Anche io ho avuto delle difficoltà.
Patrizia: Però tu avevi chiaro un percorso, sapevi dove volevi arrivare, sapevi….
Gina: La difficoltà è che i ragazzi restano, a volte, poco entusiasti, lontano da ciò che l'insegnante propone loro. Io a volte arrivo in classe con entusiasmo, vorrei dire tante cose, coinvolgere tutti, ma dopo aver preparato il terreno vedi che ti guardano… così…con un'aria perplessa per cui devo sempre essere io a proporre e a rispondere ai quesiti altrimenti non se ne viene fuori dal silenzio. Però c'è il rovescio della medaglia perché una volta che hanno capito il meccanismo riescono a procedere con più partecipazione.
Ciro: Scusate la mia domanda era fatta per provare a dire dov'è che abbiamo fatto noi qualcosa che non ha funzionato…
Gina: Quando una non è pronta a rispondere… a smussare le loro titubanze.
Ciro: Che vuol dire "smussare le loro titubanze"?
Gina: Cioè, portare avanti il discorso, perché a volte ci sono argomenti, problematiche, a cui non si sa rispondere perché non riesci a trovare la parola giusta per le domande e i chiarimenti che gli alunni si aspettano. È necessario, quindi, spostare l'attenzione su argomenti in cui si è più preparati per uscirne, altrimenti il discorso si ferma…
Angela: Io penso che nell'attività laboratoriale, non sono solo i ragazzi e i bambini in gioco, ma sono anche gli insegnanti. In gioco nel senso che, per quanto uno possa programmare tutte le variabili possibili e immaginabili, e anche il percorso, succederà sempre qualcosa che porrà l'insegnante in quel dubbio, a dire "ma sto facendo bene, o è una cosa sbagliata che li può far deviare?"
Gina: Poni la domanda e a volte loro hanno paura di rispondere, "chissà se dico bene o dico male", quindi devi sempre spronare, sempre rassicurarli, quindi devi sempre portare tu avanti il discorso e non vedi la loro spontaneità, la loro genuinità…
Angelina: A mio avviso la preoccupazione dell'insegnante è la paura del non sapere: cosa succede se un alunno ci chiede qualcosa che non sappiamo?
Ciro: E come si affronta questa preoccupazione?
Angelina: Bisogna mettersi in gioco. A volte capita che i ragazzi arrivino senza aver fatto un problema chiedendomi di farlo insieme alla lavagna. Sono proprio quelli i momenti in cui io mi metto alla prova insieme a loro cercando di capire il loro metodo di lavoro ed indirizzarli, allo stesso tempo, sulla buona strada. Per fare questo lavoro però è importante

essere preparati, aggiornarsi costantemente. Non oso immaginare come vivono la situazione le colleghe della scuola primaria, che ovviamente devono essere pronte a qualsiasi tipo di domanda…

Gina: È proprio così…

Angelina: E se a volte i ragazzi fanno delle domande sulle quali non siamo preparati?

Gina: No va be', la cosa è questa, prima di cimentarmi in un lavoro, a casa provvedo e me lo preparo…

Ciro: Scusate, ma le domande che riguardano cose che non abbiamo preparato nel dettaglio, sinceramente le vogliamo o non le vogliamo?

Voci: Sì.

Angelina: Finora diciamo che mi è andata bene con le domande dei ragazzi: non mi hanno mai chiesto cose alle quali non ho saputo rispondere.

Angela: Però non penso che per una domanda a cui una insegnante non sa dare una risposta viene meno il ruolo dell'insegnante.

Angelina: No, sicuramente non viene meno il ruolo dell'insegnante: può tranquillamente capitare di non essere preparatissimi su un argomento. Vero è, però, che gli alunni si aspettano molto da noi e nel momento in cui non si vedono dare una risposta alle loro domande; beh… forse siamo noi che pensiamo di aver fatto una figuraccia! L'importante è far capire ai ragazzi come, insieme si possono cercare delle risposte.

Ciro [*A Orsola*]: Una tua difficoltà, una precisa.

Orsola: I bambini più vivaci, perché si interessavano poco all'esperimento; perché purtroppo non riuscivano a mantenere viva l'attenzione. Allora, senza guardare, si buttavano così a dire "quello affonda, quello galleggia". Io dovevo richiamarli e dire "ma facciamo l'esperimento, vediamo prima e poi diamo le risposte".

Ciro: E come l'hai affrontata questa cosa?

Orsola: Eh... come l'ho affrontata? In effetti non è stato facile mantenere viva la loro attenzione.

Ciro: A te quanti anni hanno?

Orsola: Tre anni, quattro anni e cinque anni.

Ciro: E quindi, che hai fatto?

Orsola: Piano piano, ho cercato di richiamarli all'attenzione; ho detto "facciamo prima l'esperimento e poi voi date le risposte".

Ciro: Adesso vi chiedo di raccontare di qualcosa che vi ha particolarmente sorpreso.

Anna: Allora, io sono rimasta felicemente sorpresa. Ho notato che i bambini, sono bambini di prima, sono molto intuitivi. Cioè, io non avrei mai immaginato che avrebbero risposto in quel modo; specialmente quando Angela ha preso la bacinella con l'acqua e ha immerso il palloncino gonfio, l'ha spinto nell'acqua e l'acqua è salita. Loro hanno detto "il palloncino ha preso il posto dell'acqua". Poi ha chiamato una bambina e le ha fatto provare l'esperimento; allora la bambina ha detto "maestra, io spingo sopra, ma l'acqua spinge sotto!"; ho detto "cavolo, questa già è arrivata al principio di Archimede!" Quindi alcuni hanno dato delle risposte che ci hanno lasciato veramente sorpresi.
Angela: Cosa che invece noi pensavamo difficile da raggiungere.
Anna: Eh, infatti dopo mi è sembrato tutto facile, ho detto "questi rispondono bene!"
Ciro: Che cosa vi è sembrato facile, dopo?
Anna: Dopo mi è sembrato facile fare altre cose; prima siamo partite un po' timorose, almeno io, anche perché è sempre possibile che un bambino ti faccia una domanda a cui non si riesce a dare una risposta esaustiva.
Angela: Altre cose che ci hanno sorpreso?… Una zucchina e una carota, la zucchina galleggia e subito una bambina ha detto "no maestra, ma dentro non c'è niente" e io le ho detto "ma come non c'è niente?" e lei "c'è aria, è larga" e la carota... poi un altro bambino me lo ha riportato nel disegno. Questo è uno di quei bambini che ha partecipato, però non ha detto nulla in quel momento. Quando lo ha rappresentato ha scritto sopra "la carota è affondata perché è stretta stretta"; e quando io gli ho chiesto "ma che vuol dire che è stretta stretta?" lui mi ha risposto: "maestra è stretta stretta" *[mima]* come se volesse dire che è più compatta. Dovendo dire della carota, lui pensa, e poi trova: "la carota è stretta stretta"; quindi anche il suo associare la terminologia a quello che aveva osservato (cosa che magari io insegnante avrei avuto difficoltà a dire loro utilizzando una terminologia semplice e fruibile da un'utenza così giovane).
Rossana: Invece a me ha sorpreso un bambino di cinque anni. Quando abbiamo fatto il galleggiamento, abbiamo dato ai bambini il palloncino e l'abbiamo messo nell'acqua e abbiamo detto di spingere in giù; lui ha spinto e ha detto "l'acqua si sposta e c'è qualche cosa sotto che fa forza, si oppone". Allora dico: "adesso facciamo il disegno e vediamo un poco". E lui vuole sapere "perché spinge? perché sento questo forza sotto?" e avevo paura di rispondere io, dico "adesso dove vado a parare, forse... non posso usare termini difficili... vado oltre". E lui mi ha fatto il

disegno: lui che spinge il pallone e sotto la forza che sente: un rettangolo. Allora io dico “questo che cos'è? “è una pietra – dice – una cosa più forte di me”; mi è rimasto impresso questo.
Ciro: Che cosa ti ha colpito?
Rossana: Eh... che il bambino era arrivato al principio di Archimede! Ho chiesto: perché l'acqua si è spostata, dice “è uscita fuori perché io spingevo, però se anche io faccio forza - mi ha detto - c'è qualche altra forza che reagisce, che viene fuori, che si oppone e io non ce la faccio”. “Va bene – dico – allora fammi vedere un poco tu che cosa dici perché io non ti capisco, e fammi il disegno...”
Angelina: A me ha colpito il fatto che tutti i ragazzi abbiano partecipato e abbiano detto la loro, anche quelli più timidi. Sinceramente non mi aspettavo che il lavoro coinvolgesse tutti. Ognuno di loro ha espresso il suo punto di vista e questo mi ha gratificata molto.
Ciro: A cosa lo attribuisci questo fatto? Il fatto che...
Angelina: Sicuramente al fatto che i ragazzi si sentivano liberi dalla realtà scolastica, dal giudizio scolastico... e questo sicuramente li ha spronati.
Gina: Era un gioco...
Angelina: Fortunatamente avevo deciso di dire ai ragazzi che non sarebbero stati valutati; sapevo che il risultato, se non lo avessero saputo, sarebbe cambiato: sicuramente sarebbero stati i soliti quattro o cinque a darmi delle risposte, mentre gli altri sarebbero rimasti zitti come al solito per paura di sbagliare.
Ciro: Pensi che possa trarne giovamento il modo di fare scuola?
Angelina: Sicuramente sì. Il fatto che si sentano liberi da qualsiasi tipo di giudizio da parte dell’insegnante li spinge a parlare tranquillamente. Vorrei sottolineare che anche nella fase di verifica i ragazzi hanno avuto meno difficoltà a rispondere alle domande.
Ciro: Sul lavoro che avevi fatto?...
Angelina: Sì, i ragazzi lavoravano con uno spirito diverso e si mostravano più motivati.
Ciro: Che cambiava?
Angelina: Cambiava il loro modo di porsi nei confronti dell’insegnante, avevano uno atteggiamento meno formale del solito: avevano un linguaggio più confidenziale, meno curato, ma io l’ho apprezzato molto.
[Voci sovrapposte che commentano]
Gina: A me ha sorpreso il fatto che la maggioranza dei bambini si sentivano liberi e non si comportavano come quando erano impegnati in attività più tradizionali come il leggere e lo scrivere. Anche la

disposizione degli alunni liberi di muoversi, così come avviene nelle attività laboratoriali,permetteva loro una maggiore partecipazione e un maggiore coinvolgimento.
[Si parla degli escamotage per riorganizzare i banchi]
Patrizia: Allora, mi sono sorpresa quando dopo aver verificato se la zucchina galleggiava, Alessandro ha detto "galleggia perché è acquosa". E ancora, all'inizio molti dicevano "le cose grandi sono pesanti e perciò affondano"; poi un bambino ha detto: "ma la barca è grande e non affonda"; e un altro bambino ha replicato: "sì, anche il motoscafo è grande e non affonda perché c'è l'aria" e io non mi aspettavo che facesse questa osservazione.
Ciro: Che cosa non ti aspettavi che dicesse?
Patrizia: Non mi aspettavo che dicesse che il motoscafo oltre ad essere motoscafo era anche aria, cioè era un sistema. Per me è stata una sorpresa, non pensavo che avesse questa intuizione, che in realtà galleggiava aria e barca, non solo la barca. E poi un'altra cosa che non mi aspettavo, questa in senso negativo, è quando abbiamo fatto l'esperienza con il sasso nel mais, quando è stata posta la domanda se il sasso si comportava, pesava allo stesso modo anche nell'acqua, i bambini hanno detto che nell'acqua pesava di più.
Ciro: Che cosa ti ha sorpreso di questa cosa?
Patrizia: Io ritenevo che loro pensassero che in acqua il sasso pesasse lo stesso.
Ciro: Perché pensavi che avrebbero detto questo?
Patrizia: Perché così è, insomma. Però siccome loro hanno dovuto infilarlo e hanno fatto forza – invece nell'acqua ci va da solo – allora loro avevano avuto questa intuizione. Però per fortuna quando abbiamo fatto il confronto dei livelli, allora subito si sono ricreduti. Però se non fosse stata posta quella domanda, loro sarebbero rimasti con quella convinzione e io non me ne sarei accorta.
Ciro: E tu saresti rimasta con la convinzione che...
Patrizia: E quindi chissà quante cose passano, che io do per scontato che loro abbiano raggiunto e invece non le hanno raggiunte. E poi un'altra cosa, magari loro fanno degli interventi e a volte l'insegnante non riesce a cogliere quell'intervento che poteva essere interessante per uno sviluppo del discorso.
Ciro: Un compagno?
Patrizia: No, io dicevo, magari loro fanno degli interventi che poi io non so cogliere. Magari una persona con una maggiore padronanza riuscirebbe a coglierli e a portare la discussione in un' altra direzione.

Ciro: Adesso voglio chiedervi se, alla luce dell'esperienza fatta, cambiereste qualcosa nel modo di programmare il lavoro che avete proposto in classe.
Anna: Io penso che se avessi avuto più tempo avrei cominciato molto prima. Noi siamo arrivate subito all'esperimento. Avrei parlato molto di più in classe delle cose, dei liquidi, della forma, dell'acqua,...
Ciro: Perché?
Anna: Perché già in questo modo sono stati molto intuitivi i bambini, quindi partendo dalla base, da prima, e parlandone di più, io penso che saremmo arrivate subito a delle conclusioni.
Angelina: Io penso che non cambierei niente del lavoro svolto in questa classe. In un'altra classe potrebbe essere diverso..non lo so. Queste sono cose che dipendono molto dai ragazzi, dal contesto…
Gina: Io dedicherei un po' di tempo in più, visto che i risultati sono stati positivi, mi organizzerei...
Ciro: Perché, quanto tempo ci hai dedicato tu?
Gina: Adesso ho fatto quattro o cinque lezioni... Le prossime lezioni me le organizzerei con più calma; magari con la partecipazione di più persone, così non dovrei fare il doppio lavoro di organizzare verificare ecc… Questo è il modo di lavorare ottimale!
Anna: Scusa posso dire un'altra cosa che è importante per me? Riflettendoci, mi sto rendendo conto che effettivamente è andato tutto bene, quindi volendo potrei anche non cambiare niente, se prima ho detto che volevo preparare un po' prima, è perché io non sono della materia e ho bisogno di organizzarmi, quindi forse loro hanno maggiore padronanza, invece io non essendo molto addentro alla cosa, ho bisogno di partire da lontano.
Patrizia: Se avessi avuto tempo – purtroppo il tempo è un'altra difficoltà di cui prima non ho parlato, è sempre poco per le tante cose da fare – avrei fatto il percorso partendo dalle forze, perché secondo me è propedeutico al galleggiamento. L'anno scorso io ho lavorato con delle classi terze sul fare-forza e poi ho proposto il galleggiamento. Già la prima volta erano uscite tante idee collegate proprio al fare-forza, che avevamo sviluppato precedentemente. Perciò, rifacendomi a quell'esperienza, penso che sarebbe stato il punto di partenza ideale. Comunque, tornando al galleggiamento, io ho iniziato con il vasetto, le biglie... Io questa attività l'avrei fatta dopo, avrei lavorato prima con la bacinella, i vari oggetti che galleggiano o affondano e successivamente l'altra.

Ciro: Perché?
Patrizia: Perché penso che il percorso sarebbe stato più chiaro.
Ciro: Cioè, dov'è che ti sembra più lineare? In cosa ti torna più chiaro?...
Patrizia: Forse perché non sono riuscita io a cogliere delle cose, forse gliele ho imbrogliate le idee, non le ho chiarite...
[Si discute sul fatto che le cose sono sempre "imbrogliate"]
Angela: Ci sono tante cose, passaggi, collegamenti che si creano all'istante; nemmeno c'è la volontà di "imbrogliare le idee"...
Patrizia: E comunque bisogna decidere a un certo punto in quale direzione andare, se in quella dell'acqua che fa forza, oppure il materiale, la fittezza del materiale...
Ciro: E come si fa a scegliere?
Patrizia: Non lo so, penso che è l'insegnante che decide; io penso che l'una valga l'altra.
[Si discute sulla molteplicità delle vie]
Rossana: Come io ho introdotto il peso, ma l'ho introdotto male; penso che lo riprenderò l'anno prossimo.
Gina: Io dedicherei un po' di tempo in più a questo modo di lavorare perché è più coinvolgente e più efficace e meno al resto...
Ciro: A che cosa dedicheresti meno tempo?
Gina: La parte tradizionale dell'insegnamento.
Ciro: E che cos'è la parte tradizionale?
Gina: Quella in cui tu devi interrogare, che il bambino vive come una fatica. Io mi accorgo del loro disagio quando li guardo e vedo che mi guardano e abbassano la testa perché non vogliono essere interrogati... ed io purtroppo devo interrogare, lo devo fare.
Ciro: E perché lo devi fare?
Gina: E se io non lo interrogo, come faccio a dire se uno ha capito oppure no?
Ciro: Questa è una buona domanda; come si fa a capire se uno ha capito o no?
Gina: Io adesso mentre fanno delle cose, faccio varie domande e il ragazzo in questo modo partecipa di più, mi vedono meno insegnante rigida, ferma...
Patrizia: Io volevo dire che i bambini spesso si adeguano a quello che vuole l'insegnante; se tu proponi un modo di insegnare, loro rispondono alle tue richieste. Quindi se non cambia prima l'insegnante, non cambia l'atteggiamento della classe.

Capitolo IV – Acqua e zucchero: una "dolce" situazione problematica

Lavori di B. Brillante, F. Di Biase, R. Ferrara, A. Guerra, A. Palma, C. M. Torrillo, M. Venditto, R. Virgilio
Gruppo coordinato da D. Iannece

Introduzione

Le attività di sperimentazione condotte nell'ambito della *Rete Galileo* sono state proposte nella Scuola dell'Infanzia, nella Scuola Primaria e in quella Secondaria di primo grado alla luce di un modello di apprendimento di tipo socio-costruttivo. L'obiettivo prevalente di questa esperienza, come di tutte le altre nel progetto, è lo sviluppo negli allievi del pensiero scientifico in continuità con la loro naturale curiosità e necessità di esplorazione del mondo.

D'altra parte l'evoluzione del pensiero va di pari passo con l'acquisizione del linguaggio; si incomincia infatti a parlare ed a pensare nella primissima infanzia, i due processi si stimolano naturalmente a vicenda in un intreccio continuo. La necessità di formulare un pensiero che si "sente" stimola ad adeguare il linguaggio e, d'altra parte, quando il linguaggio è adeguato, il pensiero naturalmente evolve verso chiarezze e complessità maggiori. Non si aspetta di avere il linguaggio più adeguato per pensare alle cose, si comincia molto prima. Naturalmente per proseguire in questa direzione e raggiungere livelli di maggiore generalità ed efficacia, aldilà di quelli stimolati dalla semplice esperienza quotidiana, è necessaria una forma di "educazione".

Questo approccio ha consentito di sviluppare negli allievi, oltre a competenze strettamente disciplinari, una serie di competenze ed abilità più generali, quali ad esempio:

- Riconoscere i problemi e le possibilità di affrontarli e risolverli.
- Perseverare nella ricerca e mettere ordine nelle procedure di indagine.
- Superare la reticenza ad esprimersi di chi pensa di non sapere, di non aver capito e, quindi, abituarsi a domandare.
- Confrontarsi con gli altri, mettendo a fuoco l'esistenza di più punti di vista e la conseguente necessità di procedere, spesso, ad accomodare diversamente le proprie opinioni.
- Essere consapevoli della provvisorietà delle spiegazioni che si danno dei fenomeni e dei loro limiti di validità.
- Imparare ad esprimere ed argomentare le proprie idee.

- Lavorare in gruppo attraverso l'ascolto e la condivisione delle scelte.
- Sviluppare il pensiero critico e valutare la pertinenza, le potenzialità di un discorso.

Fra le attività proposte, tutte ispirate a questa visione dell'educazione scientifica e matematica, la situazione problematica che abbiamo denominato "Acqua e zucchero", e di cui ci occupiamo in questo capitolo, si presta molto bene, come vedremo nei resoconti di seguito riportati, a perseguire gli obiettivi sopra elencati, e si caratterizza inoltre per i suoi specifici contenuti disciplinari. Essa è centrata sulla nozione cruciale di rapporto fra due diverse variabili e di conseguenza sulla nozione correlata di grandezze direttamente proporzionali. Intorno a noi ci sono molte situazioni, molti fenomeni, in cui il rapporto tra due variabili dà luogo ad una nuova significativa grandezza: è così con la velocità, data dal rapporto tra spazi e tempi, con il peso specifico, con la densità, con il costo unitario di una merce, con la pressione e così via. Nel nostro caso ciò che interviene è la nozione di ***concentrazione*** di una soluzione (di acqua e zucchero). In tutti questi casi, pur così comuni, quello che risulta tutt'altro che facile è riconoscere, comprendere e dominare questa nuova grandezza, perché per fare ciò si richiede la capacità di tenere sotto controllo contemporaneamente le due variabili da cui si parte, e questa abilità non è scontata nemmeno in un adulto. Nel nostro caso, ad esempio, non basta che lo zucchero sia di più perché la soluzione di acqua e zucchero sia più dolce, così come non basta che ci sia meno acqua. Le due cose si devono mettere in relazione l'una con l'altra, e quello che alla fine serve a misurare la dolcezza è il rapporto tra le due quantità. Che la capacità di rendersene conto non sia affatto banale, è testimoniato fra l'altro dalla Storia, se è vero che si è dovuto aspettare fino a Galilei per riuscire a concepire la velocità come rapporto tra spazio e tempo, mentre prima di lui non si ammetteva nemmeno che avesse senso fare rapporti fra cose di diversa natura.
Ebbene l'attività di acqua e zucchero si propone di far gradualmente pervenire gli alunni a centrare questo obiettivo. Peraltro, per le sue significative componenti percettive (entrano in gioco, oltre all'azione, anche i sensi come la vista, il tatto e il gusto), e per i numeri piccoli o piccolissimi che si possono usare e che noi abbiamo usato, si presta molto bene ad essere rivolta anche ai bambini piccoli. Inoltre, come tutte le situazioni problematiche che sono state proposte e sperimentate nel corso dell'attività di aggiornamento sull'educazione matematica e scientifica svolta nell'ambito della **Rete Galileo**, e in particolare quelle

descritte in questo fascicolo, essa è molto flessibile, nel senso che si presta ad essere modificata o estesa in varie direzioni. Nei resoconti che seguono infatti, dopo una prima esperienza raccontata con maggiore dovizia di particolari, in cui l'attività viene presentata in forma più "standard", sono raccolte numerose varianti che mostrano, come dicevamo, l'ampia flessibilità della situazione problematica scelta. Vedremo in particolare, raccolte alla fine di questo capitolo, delle versioni più elementari pensate per la scuola dell'infanzia, ottenute adattando opportunamente delle fiabe, così come una presentazione nella scuola secondaria, dove si intravedono varie possibilità di approfondimenti.
Un'altra caratteristica dell'attività di "Acqua e zucchero" è l'ampio utilizzo che essa consente dello strumento grafico, dai primi disegni fatti dai bambini piccoli, che li aiutano a capire, fino alle rappresentazioni cartesiane più o meno elaborate di cui nel seguito si vedrà qualche esempio.
Si potrebbe andare più lontano, né del resto i racconti che seguono pretendono di esaurire tutte le potenzialità dell'attività. Ad esempio si possono usare in modo sistematico le tabelle ed esplorare con esse le proprietà delle proporzioni, si possono studiare altre situazioni "isomorfe" a quelle della concentrazione (si è detto: velocità, peso specifico, ecc.) e rendersi conto che le stesse linee del piano cartesiano possono essere interpretate in modo diverso a seconda del contesto che descrivono, riconoscendo così la grande generalità di questo specifico strumento matematico, e così via. In ogni caso, a qualunque livello si operi o ci si fermi, appare cruciale osservare che l'attività consente di far crescere contemporaneamente le competenze matematiche e fisiche, ed anche quelle linguistiche, che entrano in gioco quando i bambini sono spinti dall'esigenza di descrivere le proprie acquisizioni e difendere le proprie idee e confrontarle con gli altri nell'interazione sia con l'insegnante che con i loro compagni.
L'esperienza condotta su "Acqua e zucchero" è risultata dunque significativa come attività diretta all'osservazione della realtà, all'individuazione di proprietà comuni, di grandezze, di proporzioni tra grandezze, di relazioni tra variabili. Essa ha consentito di operare stime numeriche, quantificazioni e misurazioni e ha offerto la possibilità di intervenire in modo razionale sulla realtà. Inoltre ha rafforzato in tutti gli insegnanti l'idea che l'elaborazione e la conquista dei concetti scientifico-matematici avviene attraverso esperienze reali di modellizzazione.

Infine la discussione, momento essenziale dell'esperienza, ci ha consentito di scoprire che le varie forme di linguaggio verbale e non verbale costituiscono, per la loro ricchezza espressiva e la loro potenzialità cognitiva, il punto di partenza di ogni attività di formalizzazione.

Oltre alla discussione guidata, nella conduzione dell'esperienza sono risultati essenziali:

- la valorizzazione degli aspetti percettivi della cognizione;
- il lavoro di gruppo;
- l'uso sistematico dell'anticipazione e della formulazione di ipotesi e la loro validazione;
- l'uso e il confronto di una molteplicità di rappresentazioni;
- la registrazione sistematica dei processi di classe da parte dell'insegnante per una successiva riflessione e riprogrammazione degli interventi.

Nel seguito di questo capitolo vengono riportate un certo numero di esperienze condotte in varie classi di vari livelli scolari. Nel riportarne i resoconti si è preferito dare direttamente la parola alle insegnanti protagoniste delle esperienze.

Un'attività, tante esperienze. Storie di classe

1. Scuola primaria di Pietraroja (BN). Classi 1ª/2ª.

Insegnanti Michelina Venditto e Rosa Ferrara.

Per i bambini e per le insegnanti è la prima esperienza "ufficiale" di didattica laboratoriale, tuttavia alcune strategie di conduzione e di gestione delle attività erano già adottate dalle insegnanti, se Michelina così si esprime rispetto alla formazione: "L'esperienza fatta con gli alunni, nell'ambito della sperimentazione Galileo, mi ha permesso di consolidare alcune pratiche didattiche che durante gli anni di insegnamento avevo qualche volta usato ma senza conoscerne il fondamento scientifico o l'importanza. Vedere come gli alunni costruiscono pian piano il loro sapere attraverso l'analisi, la discussione, il confronto… è per ogni docente costruttivo e gratificante in quanto chi guida gli allievi ha la facoltà, forse l'obbligo, di non dare mai la soluzione nel momento delle difficoltà ma di indirizzarli con sapienza e umiltà verso scelte ragionate, condivise, mettendo a frutto le competenze già possedute, affinando quelle che non lo sono ancora e, molto spesso, non sono messe in campo per pigrizia intellettuale o perché l'adulto tende sempre a semplificare il lavoro. Estendere la metodologia imparata ad

ogni campo disciplinare non è affatto facile ma, a mio giudizio, vale la pena provarci".
Agli alunni sono presentate sulla cattedra due ciotole simili riempite diversamente d'acqua.
Si riscontra subito tanta curiosità e interesse e senza difficoltà vengono notate le caratteristiche delle ciotole e la diversa quantità di acqua ivi contenuta. La maestra, quindi, prima invita i bambini a girarsi e, intanto, versa nell'acqua le diverse quantità di zucchero come stabilito, poi li invita a mescolare per far sciogliere lo zucchero. Gli alunni si divertono e fanno a turno.

Maestra: Quale delle due soluzioni è più dolce?
Manuela e Mariarosaria: Nella ciotola color giallo forte c'e più acqua e più zucchero e per questo è più dolce.

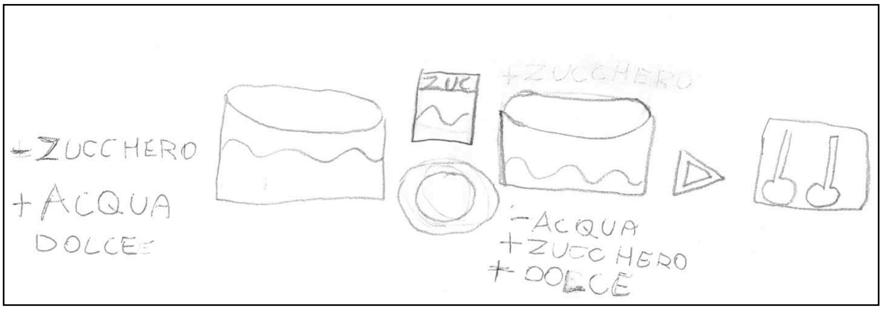


Figura 4.1

Gli altri bambini, che come tutti si fidano della percezione soggettiva e non solo delle parole, sono d'accordo che bisogna assaggiare, mettere in campo perciò non solo il senso visivo ma anche quello gustativo. A turno con un cucchiaio si assaggia la prima soluzione.

Luciana: È molto dolce, come uno sciroppo.
Marco: È molto dolce.

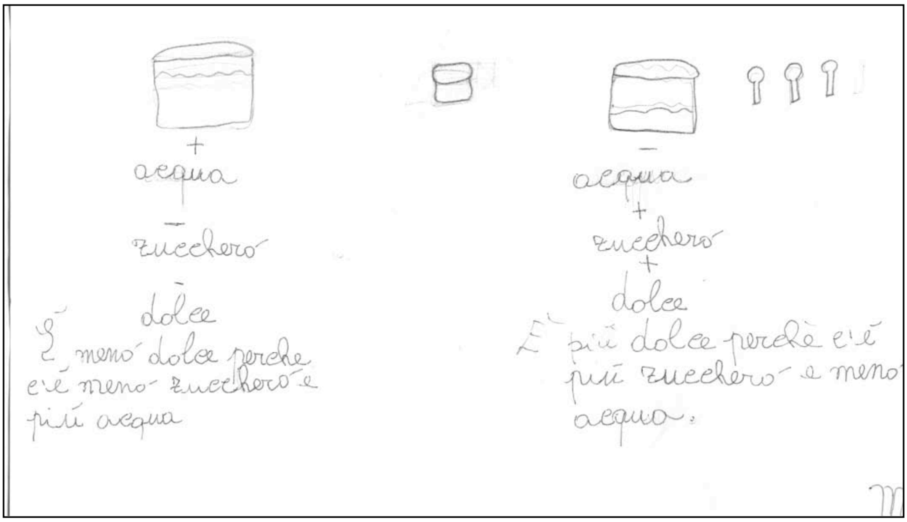


Figura 4.2

Si assaggia anche la seconda soluzione, quella della ciotola chiara e le percezioni ricevute sono esplicitate subito dagli alunni che hanno individuato le due variabili significative: la quantità di acqua e quella di zucchero.

> Manuela: È più dolce perché c'è più zucchero.
> Luciana e Giancarlo: È più dolce di quella di prima.
> Marco: È *più dolce* perché c'è *meno acqua.*
> Rosanna: C'è *più zucchero* e *meno acqua*.

Dalle parole di Rosanna si evince che i bambini cominciano a guardare entrambe le variabili significative, vengono quindi invitati a disegnare (figure 4.1 e 4.2) e a verbalizzare la situazione osservata.
A questo punto per spostare l'attenzione dei bambini sugli aspetti quantitativi poniamo un'ulteriore domanda.

> Maestra: Se volessimo rendere le due soluzioni dolci uguali, cosa dovremmo fare?
> Tutti: Aggiungere più zucchero.
> Mariarosaria: Io aggiungerei 3 cucchiai di zucchero.
> Maestra: Allora sapete quanto zucchero già c'è?
> Tutti: No.
> Maestra: È importante saperlo?
> Tutti: Sì.

La maestra svela che nel contenitore con più acqua ci sono 8 cucchiai di zucchero e nell'altro contenitore con meno acqua ce ne sono 4.

> Rosanna: Dobbiamo vedere la quantità di acqua e *dividere* l'acqua.

All'inizio non tutti i bambini avevano capito cosa volesse dire o fare la compagna ma, dopo un poco di discussione e di osservazione, **si arriva a capire che bisogna vedere quanta acqua c'è, cioè bisogna misurarla.**
Marco e Mariarosaria propongono di misurare quella della ciotola con più acqua.

> Manuela: Usiamo *i bicchieri*.
> Maestra: Quanti ne prendo?
> Tutti: Ce ne vogliono tanti.
> Maestra: Possiamo usare qualcos'altro?
> Tutti: *Le bottiglie*.

La maestra recupera bicchieri e bottiglie; la scelta di prendere bottiglie di diversa capacità non è casuale in quanto gli alunni devono riflettere sulla necessità di scegliere un'**unità di misura**. Si decide poi di misurare prima l'acqua del contenitore contenente meno acqua che viene messa nella bottiglia grande e **il livello viene segnato con una tacca**. La stessa viene messa nella bottiglia piccola che si riempie.
Lo stesso viene fatto con la quantità d'acqua maggiore: prima viene messa nella bottiglia grande che si riempie tutta, poi nella bottiglia piccola e **si scopre che di queste se ne possono riempire 4.**
Ogni qual volta viene svuotata una bottiglietta, viene segnata una tacca sul contenitore. È stato così scoperto il rapporto che c'è tra le due quantità di acqua ma gli alunni pensano anche di distribuire lo zucchero. Gli otto cucchiai di zucchero già presenti nell'acqua vengono simbolicamente rappresentati con dei quadratini azzurri e vengono distribuiti equamente per ogni tacca raggruppando e disegnando una freccia di relazione tra lo zucchero e l'acqua (figure 4.3 e 4.4).
Se nella piccola quantità di acqua (uguale ad una tacca) ci sono 4 cucchiai di zucchero, nella grande quantità ci devono essere ugualmente 4 cucchiai di zucchero per ogni tacca.

Si procede ad aggiungere i cucchiai di zucchero necessari per rendere le soluzioni dolci uguali e giungere a nuove, più “scientifiche”, rappresentazioni.

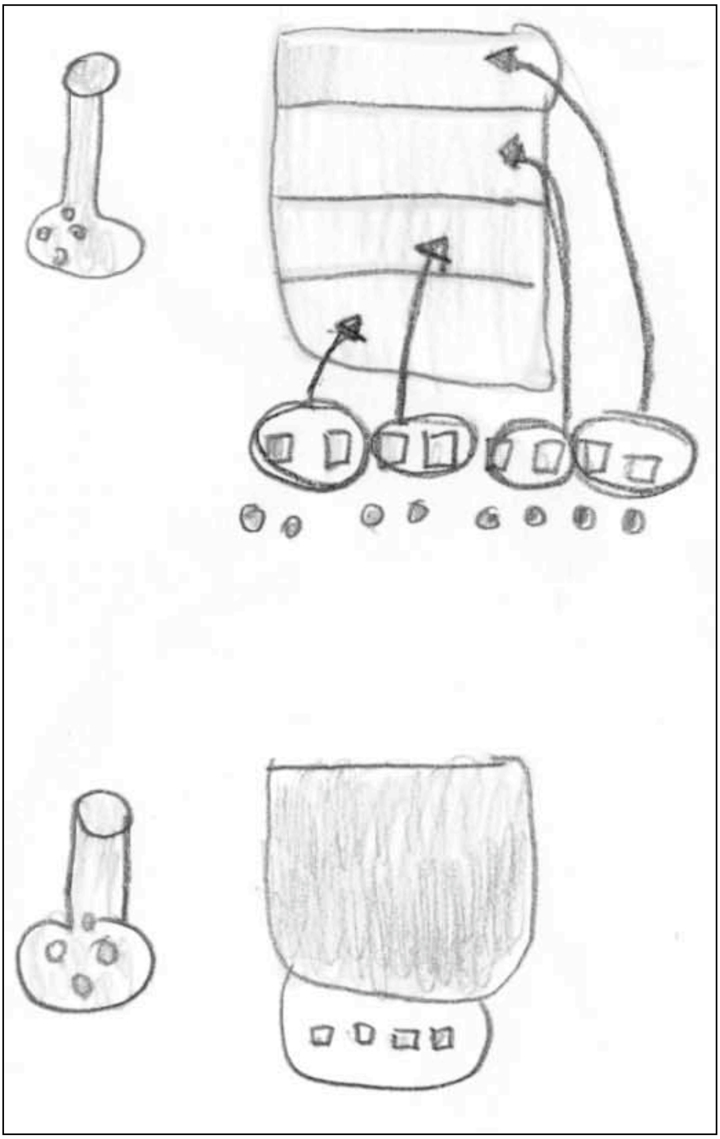


Figura 4.3

2. Scuola primaria di Pietraroja. Classi 3ª/4ª.

Insegnanti Michelina Venditto e Rosa Ferrara.

La situazione problematica è stata presentata nelle classi terza e quarta dalle stesse insegnanti della precedente esperienza. L'attività è stata presentata in modo del tutto analogo, i bambini hanno subito iniziato a formulare ipotesi, ma presto arrivano alla conclusione che per essere certi bisogna assaggiare. Anche gli alunni più grandi, quindi, si fidano della percezione personale e, perciò, si procede all'assaggio dell'una e dell'altra soluzione.

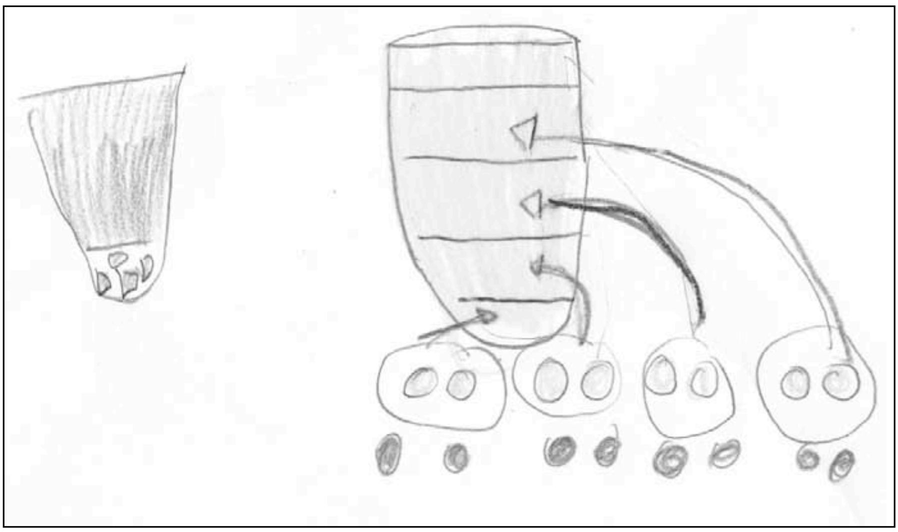


Figura 4.4

> Tutti: È più dolce la piccola quantità perché c'è meno acqua e più zucchero.
> Roberto: C'è meno acqua e uguale zucchero.

Si può osservare come, malgrado abbiano fatto conto sulla percezione, argomentino indipendentemente da questa e facendo riferimento all'individuazione delle variabili significative (figura 4.5).

> Maestra: Come facciamo a rendere le due soluzioni dolci allo stesso modo?

Con nostra grande sorpresa gli alunni non hanno affatto chiesto di conoscere le quantità di zucchero già presenti nell'acqua ma hanno risolto la situazione problematica in modo intuitivo e nell'unico modo possibile: mescolare le due soluzioni e poi dividerle pur non sapendo né la quantità di acqua né quella di zucchero contenuta nelle due ciotole. Questa soluzione non era emersa con i bambini più piccoli e ci ha spiazzato perché in qualche modo ha messo in discussione la necessità di misurare le quantità per risolvere il problema, abbiamo quindi dovuto cambiare la conduzione e richiedere esplicitamente un approccio quantitativo.

Maestra: E se avessimo la necessità di scoprire *le* quantità di zucchero e di acqua necessarie per rendere *dolci uguali* le due soluzioni, come fareste?
Errico: Ci serve sapere quanta acqua c'è.
Domenico P.: Dobbiamo misurarla.
Maestra: *Con che cosa?*
Antonella: Con bicchieri o bottiglie.
Melissa: Usiamo bottiglie uguali.
Errico: È meglio una piccola per la poca acqua e una grande per la tanta acqua.

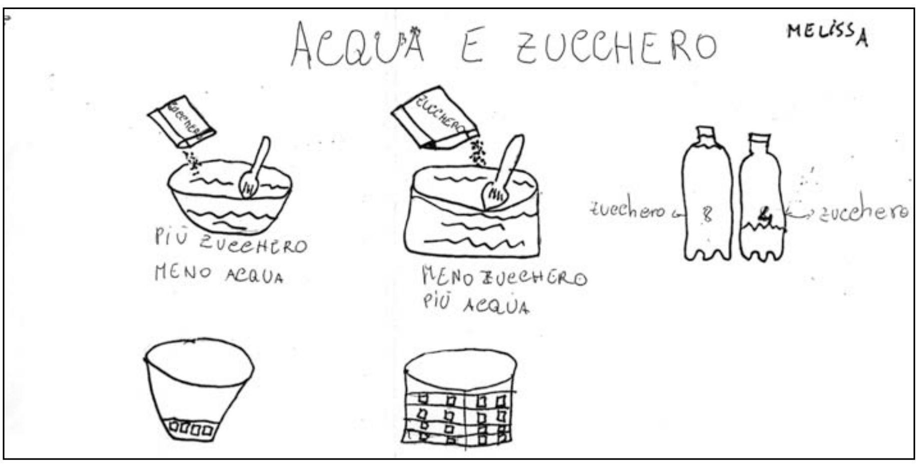


Figura 4.5

Si misura l'acqua in tutti e due i modi suggeriti dagli alunni, prima si usano le bottiglie di uguale grandezza e poi la bottiglia piccola per la poca quantità e la grande per la quantità maggiore. A questo punto gli alunni individuano le capacità delle due bottiglie e le esprimono con le unità di misura conosciute.

Domenico G.: La poca acqua misura mezzo litro.
Roberto: Quella più grande è due litri.
Maestra: Verifichiamo, ma in che modo?

Domenico G.: Svuotiamo la bottiglia piccola e poi la usiamo per misurare l'altra acqua.

Melissa: Aveva ragione Roberto: la bottiglia grande è di due litri.

Roberto: Ci vogliono 4 bottiglie piccole per riempirne una grande.

Domenico G.: Per sapere quanto zucchero aggiungere dobbiamo conoscere quanto ce ne sta.

Roberto: Altrimenti manca un dato per risolvere il problema.

Rilevata la quantità di zucchero presente nelle due bottiglie, gli alunni arrivano subito alla soluzione…

Domenico P.: Basta aggiungere 4 cucchiai di zucchero, no, ho sbagliato, ce ne vogliono 8.

Domenico G.: È vero, perché la quantità di acqua nella bottiglia grande è 4 volte quella piccola.

… ed alla rappresentazione grafica (figure 4.6, 4.7, 4.8, 4.9)

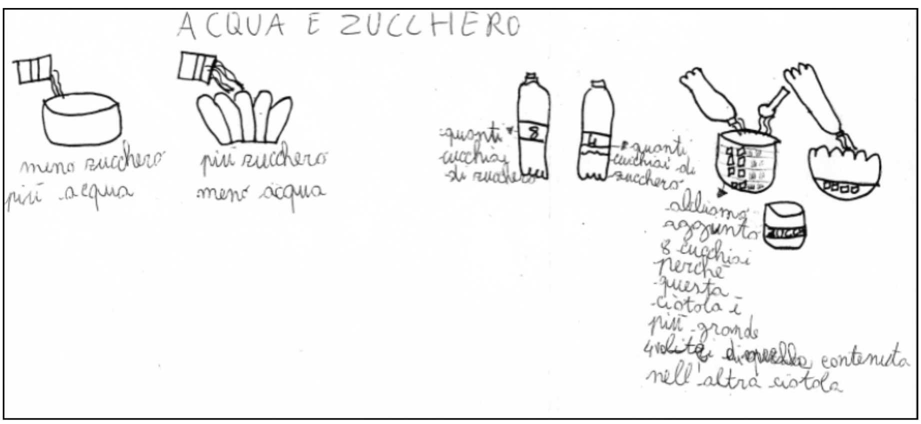


Figura 4.6

Considerazioni conclusive della maestra Rosa

Nel corso dell'esperienza effettuata ho notato che gli alunni erano motivati a risolvere il problema, volevano mettersi in gioco, ma non avevano la costanza di ricominciare dopo ogni tentativo fallito, per cui avrebbero desiderato che l'insegnante, adulto "onnisciente", li aiutasse senza riserve. Quando ti rifiuti di aiutarli prima ti senti senza cuore, ma quando leggi nei loro occhi, sui loro visi e nelle loro parole la soddisfazione di avercela fatta anche senza l'aiuto esplicito dell'insegnante pensi che proprio questo è il tuo compito: guida sicura che avvia gli allievi al ragionamento, insegna loro a riprendere un lavoro con caparbietà e senza scoraggiamento, poiché il maestro non deve

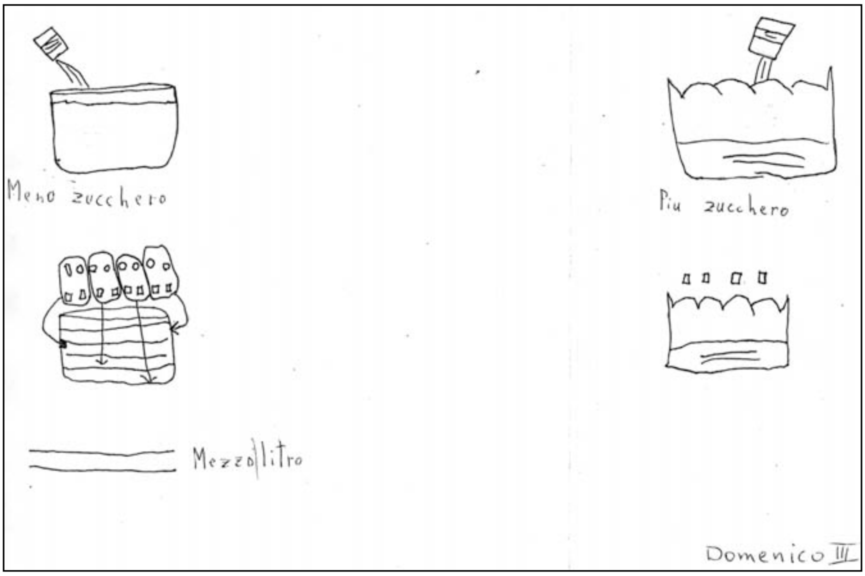


Figura 4.7

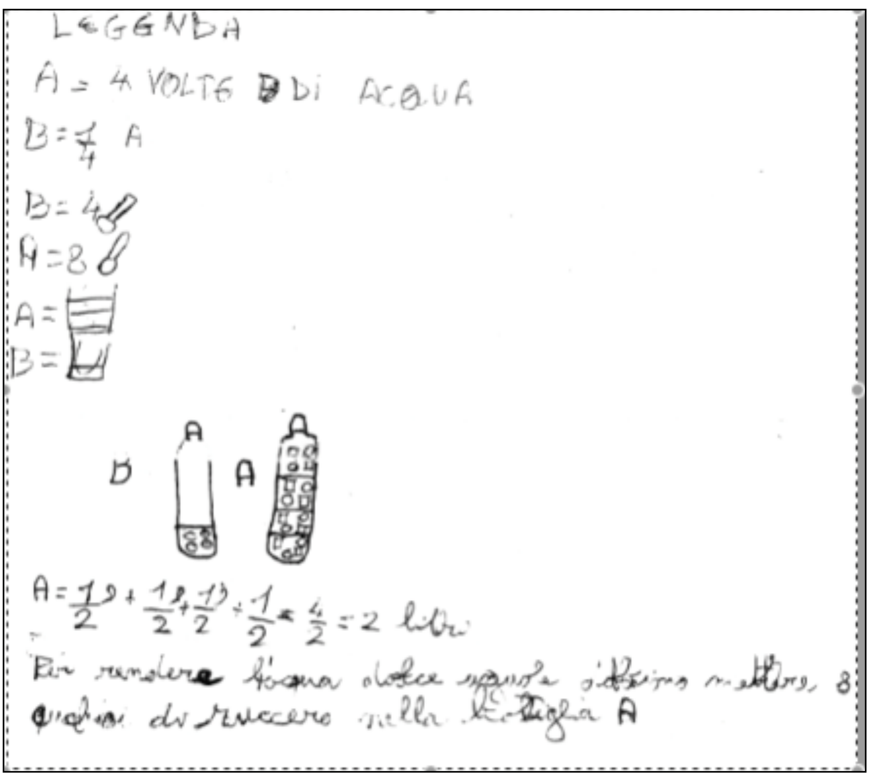


Figura 4.8

trasferire saperi ma costruire atteggiamenti positivi atti a migliorare i comportamenti e costruire la conoscenza. Il mio atteggiamento in quest’esperienza ha rispecchiato molto il modo di essere “madre”, capace di dire di no per il bene dei figli. I miei alunni, invece, hanno rispecchiato a pieno il comportamento dei bambini di oggi che hanno tutto pianificato dall’adulto.

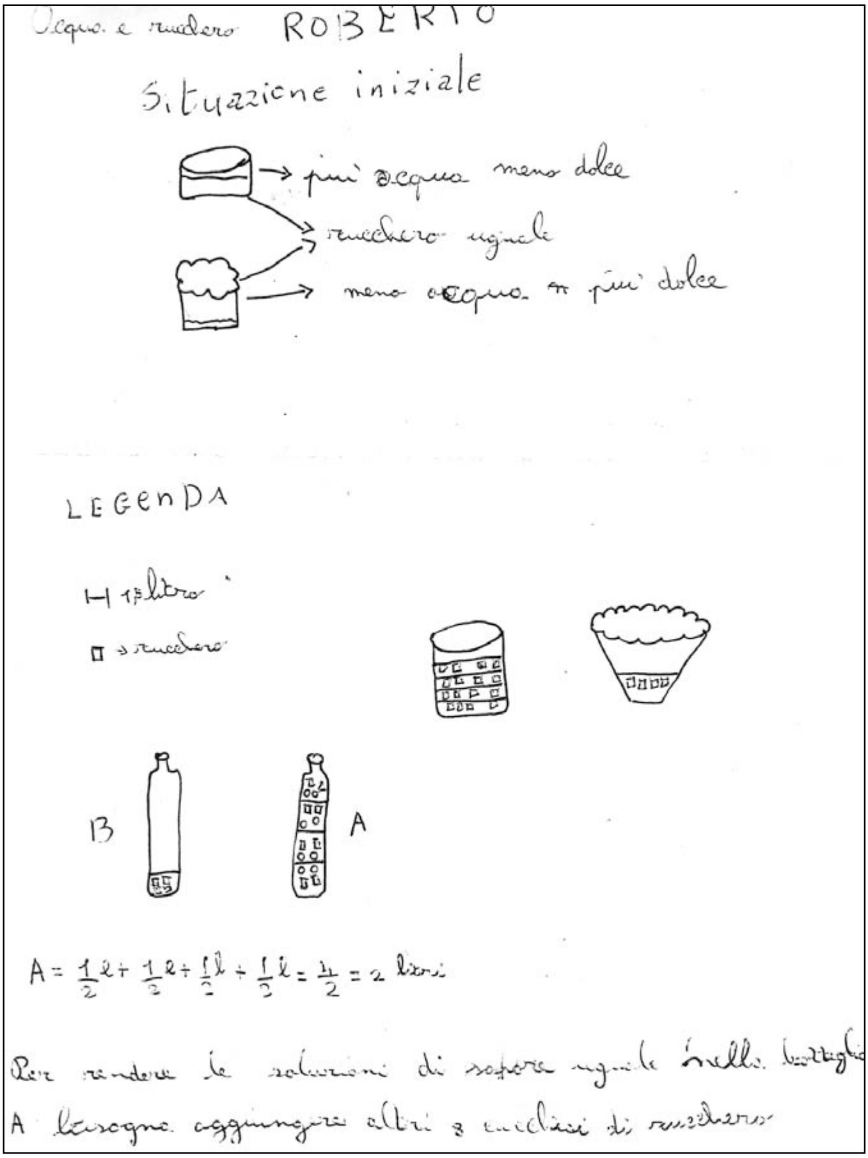


Figura 4.9

3. I. C. di Montefalcone Valfortore. Classe 3ª primaria.

Insegnante Roberta Virgilio.

Nell'anno scolastico 2008/09 ho attivato con gli alunni della classe terza della scuola primaria di Montefalcone Valfortore un percorso di ricerca-azione relativo alle modalità e agli strumenti più idonei a sostenere il processo di apprendimento logico-matematico dei bambini. L'esperienza si pone in linea di continuità e di evoluzione con le iniziative attivate lo scorso anno ed ha consentito un ulteriore potenziamento di metodologie ed attitudini in itinere.

In questo percorso gli alunni si sono arricchiti in creatività, relazionalità, attraverso una metodologia di lavoro che ha richiesto capacità di osservazione, di individuazione e definizione precisa degli obiettivi e delle strategie per risolvere problemi. Gli alunni hanno dimostrato, attraverso una serie di esperienze di apprendimento mediato, capacità di risoluzione del compito, capacità di risalire dall'astrazione all'efficienza del processo, mediante la produzione di documenti che qui si allegano e la cui elaborazione sottende ed evidenzia la processualità che l'ha connotata. Dal lavoro si evince la capacità di allargare la sfera dei bisogni cognitivi e delle conoscenze, la capacità di passare dalla generalizzazione di ciò che si è scoperto alla trasposizione di queste conoscenze in ambiti diversi e in altri campi di esperienza, attraverso tappe di un percorso <u>induttivo/deduttivo.</u>

La condivisione con il gruppo di determinate e precostituite esperienze di apprendimento, la verbalizzazione spinta e circolare sviluppano ulteriormente il senso di competenza e di profonda autostima, la ricerca della novità e della complessità. I lavori degli allievi denotano la crescente capacità della classe di creare prodotti e processi nuovi, di rispondere alle domande con altre domande, di aumentare il grado di complessità e di astrazione del lavoro e di creare condizioni di esperienza di successo.

La teoria della <u>modificabilità cognitiva strutturale</u> e le sue implicazioni pedagogiche hanno favorito un percorso di successo; in questi lavori gli alunni hanno messo in rilievo la loro capacità di passare da un evento concreto ad un atto mentale (esperimento acqua e zucchero), di porre in essere comportamenti di condivisione, di sfida a se stessi, di ricerca, di individuazione, di pianificazione e conseguimento di uno scopo. L'esperienza di questo percorso ha stimolato l'acquisizione di abitudini cognitive positive. Ha creato negli allievi la propensione ad utilizzare spontaneamente, anche in campi diversi, metodologie di apprendimento mediato.

Alla fine del lavoro i bambini, dopo aver raggiunto l'obiettivo, hanno potenziato il senso di autoefficacia e la consapevolezza del proprio progresso, hanno condiviso competenze sia emotive che cognitive. Di qui la loro disponibilità ad orientarsi ad individuare nei compiti specifici, principi, regole generalizzabili ed applicabili anche in altri campi di esperienza, e la consapevolezza che il gruppo è uno dei luoghi ideali per l'apprendimento: s'impara relazionandosi con gli altri, ascoltando e confrontando il proprio pensiero sui contributi dei compagni; s'impara cercando soluzioni, quale… soluzione? Optando per un'alternativa ottimistica.
Infine, ho scelto di raccontare l'attività di classe attraverso la verbalizzazione di un'allieva, per evidenziare il ruolo centrale che quest'ultima riveste in tutto il processo.

Acqua e zucchero
Oggi la maestra ci ha fatto fare una nuova attività. Abbiamo preso due contenitori, uno di due litri e un altro più piccolo di un litro. Abbiamo riempito d'acqua il contenitore più grande e in quello più piccolo abbiamo versato mezzo litro d'acqua. Poi la maestra ha messo otto cucchiai di zucchero nel contenitore grande e quattro cucchiai in quello piccolo e ci ha chiesto: "In quale contenitore l'acqua è più dolce?". Rocco e Iris hanno risposto che era il contenitore più grande a contenere l'acqua più dolce, perché c'era più acqua e più zucchero; Paolo, invece, sosteneva che nel contenitore più piccolo c'era meno acqua e più zucchero, quindi era più amaro. Invece io, Alessandro, Antonio, Francesca, Vittorio, Maria, Mattia e Carmen abbiamo detto che il contenitore con l'acqua più dolce era quello piccolo; allora la maestra ha detto: "Dovete spiegarmi il perché, convincermi che l'acqua del contenitore piccolo è più dolce; non basta solo affermarlo".
La maestra ci ha diviso in gruppi; il primo dei bambini che sostenevano che il contenitore grande conteneva più acqua con lo zucchero e il secondo di chi sosteneva che era il contenitore piccolo ad avere l'acqua più dolce. Io sono capitata con Alessandro e abbiamo fatto un primo disegno come esempio. Abbiamo disegnato due ragazzi, uno alto centonovantadue centimetri e un altro alto quarantasei centimetri. Il ragazzo alto cresce di otto centimetri in quattro mesi, quindi ogni mese aumenta di due centimetri. Invece, quello basso cresce di quattro centimetri al mese. Il ragazzo che cresce di più è quello piccolo perchè è cresciuto in un mese il doppio del ragazzo alto (figura 4.10).

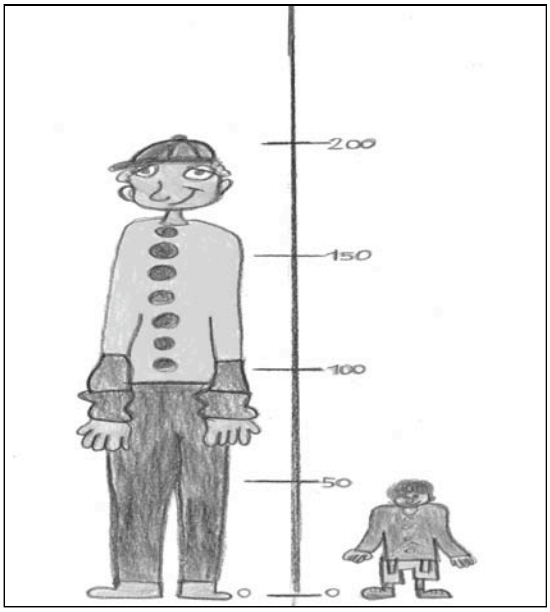


Figura 4.10

Poi abbiamo fatto un altro esempio. Abbiamo disegnato due strade: una lunga duecento metri e un’altra lunga cinquanta metri (figura 4.11). Abbiamo disegnato queste misure perché erano le misure dei due contenitori, i cinquanta metri corrispondevano a mezzo litro e i duecento

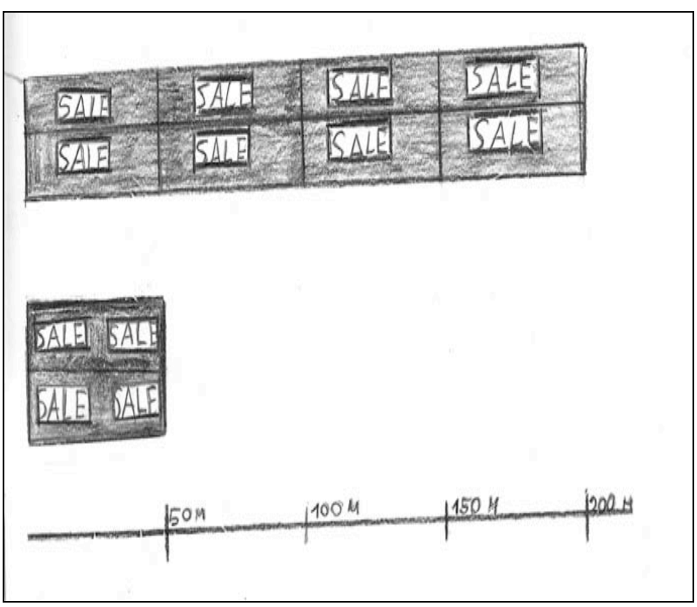


Figura 4.11

metri corrispondevano a due litri. La strada più lunga l'abbiamo divisa ogni cinquanta metri e vi abbiamo sistemato due pacchi di sale, perché i pacchi erano otto (come gli otto cucchiai di zucchero); mentre nella strada più corta abbiamo disegnato quattro pacchi di sale. La strada più salata è quella piccola, perché nei cinquanta metri ci sono quattro pacchi di sale, il doppio della strada lunga. In seguito, io e Alessandro abbiamo spiegato con un disegno perché il contenitore piccolo conteneva l'acqua più dolce.
L'acqua più dolce è nel contenitore più piccolo perché a confronto del grande nei primi mezzi litri ci sono due cucchiai di zucchero, invece nel piccolo ce ne sono il doppio, cioè quattro (figura 4.12).

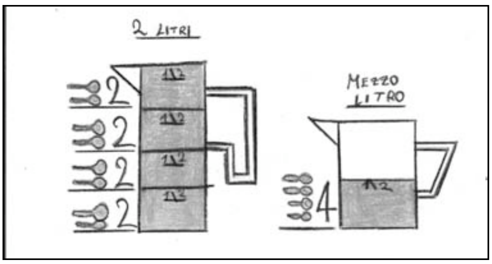


Figura 4.12

La maestra ci ha posto un'altra domanda: **"Come facciamo a rendere le due soluzioni dolci uguali?"** Ecco le nostre soluzioni.

<u>1ª soluzione:</u> Al contenitore più grande togliamo un litro e mezzo d'acqua e quattro cucchiai di zucchero (figura 4.13).

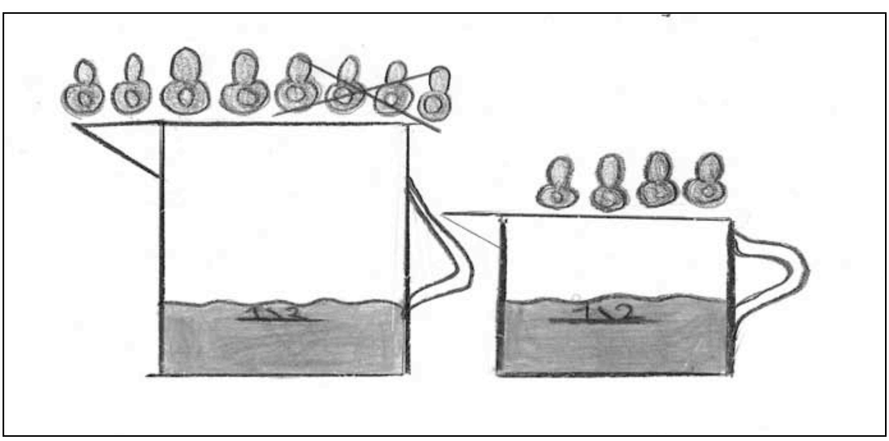


Figura 4.13

2ª soluzione: Sottraiamo un litro d'acqua e quattro cucchiai di zucchero al contenitore grande. Aggiungiamo mezzo litro d'acqua al contenitore piccolo (figura 4.14).

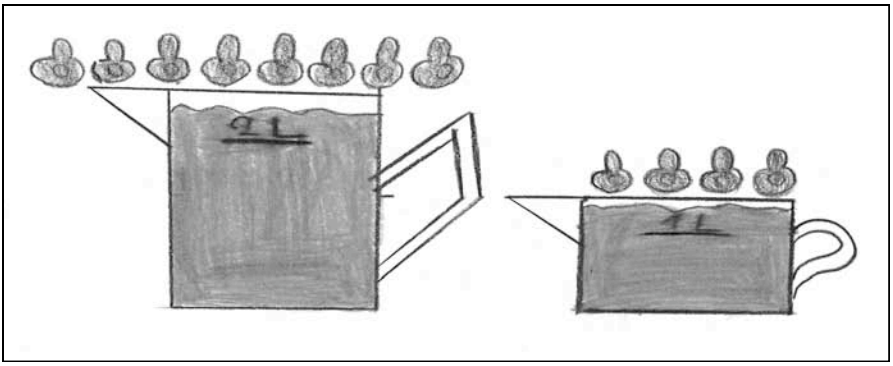


Figura 4.14

3ª soluzione: Basta aggiungere al contenitore piccolo mezzo litro d'acqua e la soluzione è uguale (figura 4.15).

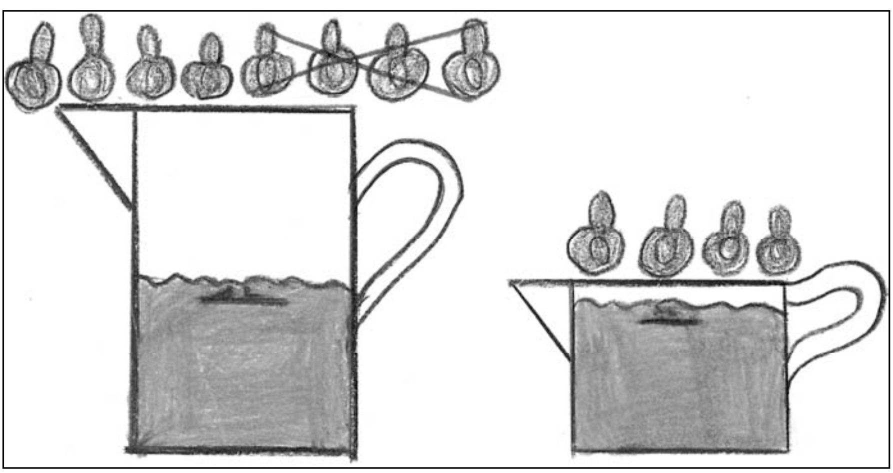


Figura 4.15

4ª soluzione: Togliamo al contenitore grande mezzo litro d'acqua e due cucchiai di zucchero. Togliamo due cucchiai di zucchero al contenitore piccolo.

Per rispondere al quesito che la maestra ci aveva posto noi abbiamo trovato più soluzioni: abbiamo confrontato la crescita di due bambini, la quantità di sale su due strade. Partire da queste situazioni è stato divertente e più facile perchè a noi piace sperimentare tutto quello che abbiamo intorno e che conosciamo. Anche se abbiamo pensato diverse soluzioni alla fine abbiamo ottenuto lo stesso risultato. Questa attività ci ha riportato alla generalizzazione che abbiamo fatto per la pagina di copertina di "Orientamento spaziale 1": "**per risolvere una situazione ci possono essere più soluzioni.**" Noi continueremo a sperimentare, a scoprire nuove cose e nuovi perché.

Le conclusioni dell'insegnante

Questa esperienza di laboratorio, che per molti aspetti è in risonanza con il metodo Feuerstein,[30] ha messo in campo numerose abilità e conoscenze procedurali, ma anche la capacità di utilizzare in maniera non rigida i processi di pensiero che rinviano ad una elaborazione metacognitiva. Si è pervenuti così ad un uso strategico delle conoscenze dell'alunno e alla possibilità di saper ricercare soluzioni alternative adeguate. Fondamentale è stata la discussione, che favorisce la dimensione metacognitiva del pensare, elemento cardine del processo educativo. Le esperienze vissute in contesti diversi sono state accolte, potenziate o trasformate con la presenza e lo stimolo dell'insegnante mediatore. Gli alunni, con buon successo, sono stati guidati alla discussione di un problema e di una soluzione; di qui l'importanza di un processo di informazione, analisi e valutazione con l'eventuale apporto di oggetti e riferimenti alla realtà. Partendo dal bagaglio di conoscenze possedute e di modalità di lavoro già sperimentate in altri momenti, si è pervenuti alla discussione di concettualizzazione e al momento di meta-discussione, come definizione di alcuni atteggiamenti nei confronti del sapere matematico.

4. Scuola Primaria San Nazzaro (I. C. di Calvi), classe 2ª.

Insegnante Antonietta Palma

Materiale

- 1 bottiglia d'acqua da 2 l e 1 bottiglia da ½ l.

[30] Sul metodo Feuerstein, cfr: Feuerstein R., Rand Y., Rynders J. (1995), *Non accettarmi come sono*, Milano, Sansoni R.C.S.

- Zucchero
- Una ciotola gialla della capacità di ½ l e una ciotola blu della capacità di 2 l.

Presentazione del problema

I bambini avevano già lavorato con il laboratorio di fisica. Arrivano in classe le due insegnanti di scuola dell'infanzia che fanno parte del gruppo di docenti che partecipano alla sperimentazione, l'insegnante di classe si dice dispiaciuta del fatto di non aver preparato un'adeguata accoglienza per le ospiti e propone di rimediare preparando una bevanda a base di acqua e zucchero. Usa le bottiglie per riempire le due ciotole, poi mette 4 cucchiai di zucchero nella ciotola piccola e 8 nella grande e chiede a due bambini di mescolare.
Terminata l'operazione, chiede ai bambini: "Secondo voi quale delle due bevande è più dolce?"

> Tutti: Quella grande perché ce ne ha 8 di cucchiai.

Nessuno è di parere diverso.

> Maestra: Come possiamo esserne sicuri?
> Bambini: Assaggiamo.

L'insegnante chiama Domenico e Valerio i quali, visibilmente imbarazzati, bevono, ridacchiano e dicono che è più dolce l'acqua della ciotola grande.
Vengono all'assaggio Alessandra e Luisa e dicono che, invece, è più dolce l'acqua della ciotola piccola. Domenico assaggia nuovamente e cambia opinione. A turno tutti assaggiano l'acqua e concordano che quella nella ciotola gialla è più dolce.

> Maestra: Allora la previsione non era corretta! Perché avevate detto che era più dolce l'acqua nella blu?
> Alessandra [*indicando la ciotola grande*]: Perché lì hai messo più zucchero.
> Maestra: Come mai è più dolce l'acqua nella ciotola piccola?
> Carmen: Perché lì ci hai messo più zucchero (indicando la ciotola piccola).

Credo che la bambina abbia dato una risposta a caso, senza riflettere e allora le rivolgo una domanda

Maestra: Sei sicura di quello che dici? Tu mi dici che ho messo più zucchero nella gialla, dove ne ho messi 4, invece nella blu ne ho messi 8.
Carmen: Ma la blu è più alta.

Resto colpita dalla risposta, e anche gli altri bambini perché chiedono la parola per ragionare sull'idea di Carmen.

Alessandra: Perché c'è meno acqua e meno zucchero in quella gialla.
Luca: La ciotola gialla è piccola, c'è meno acqua, però 4 cucchiai erano troppo rispetto alla blu.
Carmen: Nella blu c'è più acqua, nella gialla c'è meno acqua, ma è più zuccherata.
Luca [*riferendosi alla ciotola grande*]: Probabilmente lo zucchero si sente meno con tutta quell'acqua.

Tutti sono d'accordo con Luca. A questo punto chiediamo ai bambini di rappresentare la situazione. Decidiamo di farlo collettivamente alla lavagna. Domenico viene scelto come disegnatore.

Carmen: Devi disegnare la ciotola blu più grande.

Domenico temporeggia, poi sceglie una soluzione diversa, fa le due ciotole quasi uguali, ma nella blu disegna più acqua (figura 4.16).

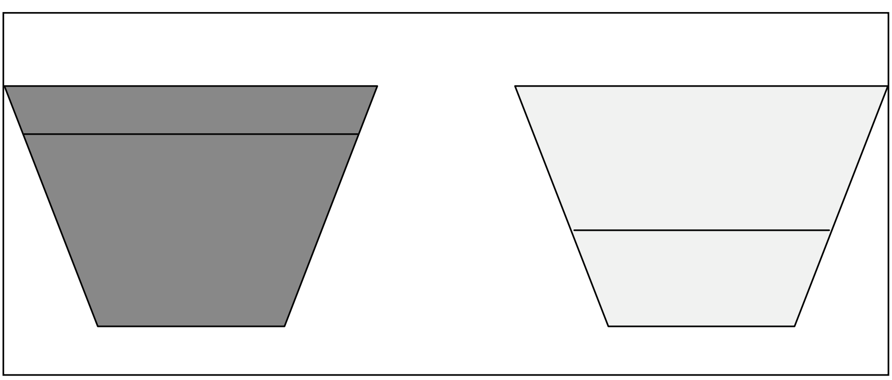


Figura 4.16

Maestra: Il disegno ci fa capire la quantità d'acqua nelle due ciotole?
Bambini: Sì.
Maestra: Spiegatemi meglio.
Alessandra [*indicando*]: Quella è poca e quella è tanta.

L'insegnante prova a far capire che vuol sapere che differenza c'è tra l'acqua contenuta nelle due ciotole, ma i bambini sembrano perplessi. Allora presenta una diversa situazione e chiede di confrontare gruppi di oggetti. Questa è la prima coppia presentata (figura 4.17):

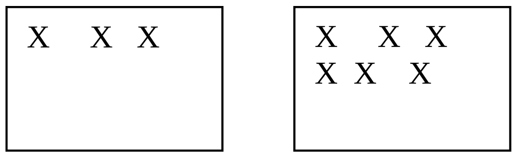


Figura 4.17

I bambini dicono che nel primo riquadro ce ne sono pochi e nel secondo tanti. Viene presentata questa seconda coppia (figura 4.18):

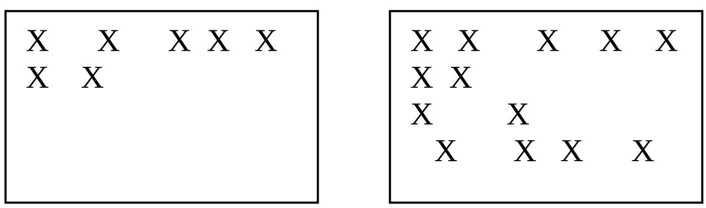


Figura 4.18

Anche in questo caso i bambini dicono che nel primo spazio ce ne sono pochi e nel secondo tanti.

> Maestra [*mostrando il primo gruppo dei due esempi*]: Qui avete detto che ce ne sono pochi ed anche qui avete detto che ce ne sono pochi, pochi e pochi, quindi vuol dire che questi due gruppi sono uguali.
> Tutti: Nooooooo!
> Carmen [*ridendo*]: Lì sono 3…
> Maestra: Come fate a essere così sicuri nelle risposte?
> Bambini: Contiamo.

I bambini confrontano le coppie di oggetti indicandole con i numeri: 3 sono più pochi che 5; lì ce ne sono 2 in meno; quello ne ha 3 di più; ecc.

> Maestra: E per l'acqua come possiamo fare a contare… misurare le quantità?

I bambini appaiono spiazzati, una delle insegnanti li invita a osservare le bottiglie usate per riempire le ciotole, ma loro non raccolgono il suggerimento, l'insegnante allora svuota le ciotole, poi riempie la gialla e la utilizza per riempire la blu.

Maestra: Di quanto è più grande la blu?
Arianna [immediatamente]: 4.
Alessandra: Almeno 3.
Luca: 1 e ½, perché è più alta e più larga.
Maestra: Come avete fatto a capire quante gialle ci vogliono per formare una blu?

Nessuno risponde.
Svuotiamo nuovamente le ciotole e ripetiamo l'operazione, finalmente tutti osservano con attenzione e rispondono che la blu è 4 volte la gialla.
A questo punto ritorniamo al problema precedente, ossia quello della rappresentazione. L'insegnante propone di disegnare le ciotole di forma quadrata, i bambini sono d'accordo.
Alessandra disegna:

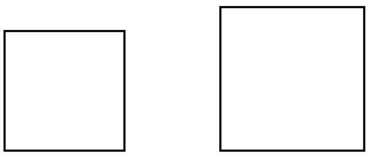


Figura 4.19

I compagni non sono d'accordo con Alessandra. Prova Domenico, il suo disegno è molto simile a quello di Alessandra. Prova Luisa:

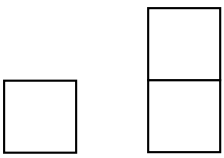


Figura 4.20

Arianna: Ma così la blu è di due gialle.
Maestra: E falla diventare di 4.

Arianna disegna:

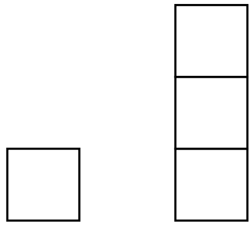
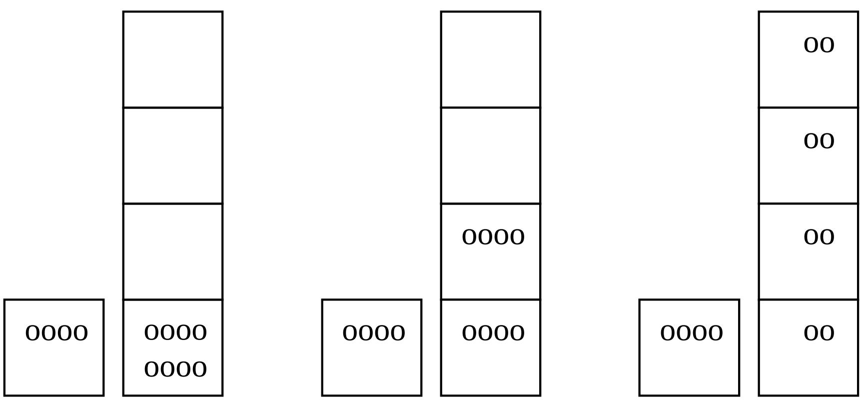


Figura 4.21

Tutti: Ma così è di 3.
Domenico: Ne dobbiamo aggiungere uno in più.
Maestra: Adesso dobbiamo metterci lo zucchero. Come possiamo disegnarlo?
Noemi: Con i pallini.

Noemi va a disegnare (figura 4.22, ***disegno 1***):



Disegno 1 ***Disegno 2*** ***Disegno 3***

Figura 4.22

Maestra: Quindi nella ciotola grande lo zucchero è rimasto tutto sotto?
Bambini: No, perché l'abbiamo mescolato.
Maestra: Ma nel disegno lo zucchero è tutto sotto. Come possiamo far capire che tutta l'acqua è dolce?

Noemi aggiusta il disegno (figura 4.22, ***disegno 2***).

Maestra: Mmmm…
Luca: Mettine in ogni quadratino.

Noemi, dietro indicazione di Luca, cambia di nuovo (figura 4.22, ***disegno 3***).

Bambini: Quella grande è meno dolce perché ce ne sono solo due di cucchiai di zucchero in ogni quadratino.
Maestra: Come possiamo fare a renderle dolci uguali?
Bambini: Mettiamo altro zucchero in quella grande.
Maestra: Quanto ne dobbiamo mettere?
Domenico: 2 cucchiai per ogni quadrato.

Domenico va a disegnare:

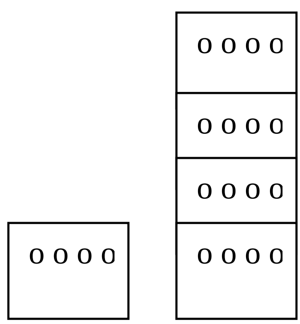


Figura 4.23

Prepariamo le due bevande, tutti vogliono assaggiare…. finalmente sono dolci uguali!

Commenti dell'insegnante
In questo lavoro appare evidente come l'idea di proporzione sia venuta fuori in maniera abbastanza veloce. Anche in una successiva attività in cui ai bambini è affidato il compito di riempire fogli di diversa dimensione con quadratini di carta, l'idea che il numero di quadratini occorrenti varia col variare della grandezza del foglio è immediata.
Più difficili i due passaggi della misurazione dell'acqua e della rappresentazione.
Gli alunni in quel periodo dell'anno non avevano ancora fatto, a scuola, esperienze di misurazione, ma, mentre in altre attività didattiche avevano facilmente intuito e trovato dei sistemi per misurare le lunghezze o il peso di oggetti, con l'acqua c'è stato bisogno del suggerimento del

docente, né hanno osservato le diverse bottiglie usate per riempire le ciotole.
Altra osservazione da fare è che questa modalità di conduzione del lavoro, se da un lato è stata favorevole perché c'è stata una condivisione generale delle idee (la soluzione finale di ogni passaggio è stata costruita con il contributo di più alunni), dall'altro lato è stata penalizzante per i più timidi, che pur invitati dal docente, non hanno voluto esprimere il loro parere se non nei momenti in cui parlavano tutti contemporaneamente. Tenuto conto di questo per altre attività si è preferito un sistema misto:

- presentazione del problema;
- gestione del lavoro in piccoli gruppi;
- condivisione in plenaria del lavoro dei gruppi;
- conclusione condivisa da tutti.

Con questo metodo l'insegnante ha notato una partecipazione più attiva di tutti. Anche i più timidi e insicuri prendevano la parola all'interno del gruppo e partecipavano alla realizzazione del lavoro, pur lasciando la decisione finale al leader che veniva in genere scelto anche per illustrare il lavoro alla classe. Ovviamente il lavoro di gruppo richiede tempi più lunghi di cui non sempre si dispone.

5. Scuola secondaria di primo grado di Cusano Mutri. Classe 2ª.
Insegnante Antonietta Guerra.
L'esperienza "Acqua e zucchero" è stata realizzata anche in una classe II della Secondaria di I grado. In questo caso l'insegnante ha comunicato fin dall'inizio le quantità in gioco sia di acqua che di zucchero. Alla domanda della docente "Quale dei due recipienti contiene l'acqua più dolce?" i ragazzi attivano naturalmente le strategie più adeguate alla loro età. Nessuno, infatti, chiede di assaggiare le soluzioni.

> Filomeno: È più dolce quella di 4 cucchiaini perché c'è meno acqua.
> Gianmarco: È più dolce il contenitore piccolo perché essendoci meno acqua ci sono più cucchiaini.
> Federico: Non si può dire qual è più dolce perché l'acqua non è uguale e quindi si devono fare ipotetici ragionamenti per trovare la soluzione.
> Docente: Perché non provi a essere più pratico e cerchi di fare una tua ipotesi?
> Federico: È vero, è più dolce quello con 4 cucchiaini perché in meno acqua c'è più zucchero.

Dario: Anche io penso che è più dolce quello piccolo perché se noi dividiamo quello di 2 l in 4, ci vorrebbero 16 cucchiaini.
Adriano: È più dolce quello di mezzo litro perché c'è più poca acqua e quindi c'è più zucchero.
Conny: Dato che nel recipiente di 2 l ci sono 8 cucchiaini di zucchero, vuol dire che in 4 recipienti da mezzo litro (che ne formano uno di due litri), ce ne saranno 16.

Quindi: 2 : 8 = 4 : 16.
Allora in proporzione il recipiente di mezzo litro è più dolce.

Docente: Dovresti rivederla questa proporzione perché hai messo in relazione negli antecedenti 2 litri nel primo rapporto e 4 mezzi litri nel secondo, che poi sono la stessa quantità di acqua, mentre nei conseguenti hai considerato 8 e poi il suo doppio.
Conny: Quindi avrei potuto fare o ½ : 4 = 2 : 16, oppure se guardo a quello di 2 litri e 8 cucchiaini 2 : 8 = 4 : 16. Ho capito, sono diversi.

Chiedo di rappresentare graficamente la situazione e non immaginavo quanto sarebbe accaduto, pensavo che i ragazzi fossero in grado di rappresentare quello che stavano pensando ed esplicitando in modo così concreto, ma mi sono accorta che ciò non era affatto vero perché è stata per loro la parte più difficile del lavoro. La rappresentazione, nella maggior parte dei casi, risultava qualitativa ma non conservava la struttura del problema. In effetti i ragazzi, molto pratici del disegno che porta a rappresentare le loro emozioni, hanno maggiore difficoltà ad usare il disegno come strumento di pensiero.
Angela (figura 4.24):

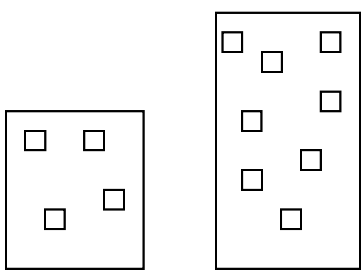


Figura 4.24

Maurizio (figura 4.25):

○ = 0,5 l
□ = un cucchiaino di zucchero

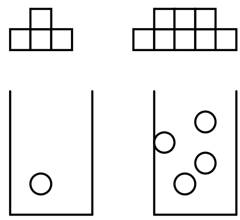


Figura 4.25

Federico (figura 4.26):

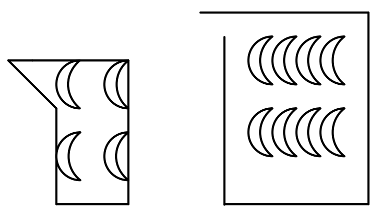


Figura 4.26

Mi ha sorpreso che ci sia un'unica rappresentazione, quella di Dario (figura 4.27), che evidenzia il rapporto di proporzionalità diretta già esplicitato simbolicamente.

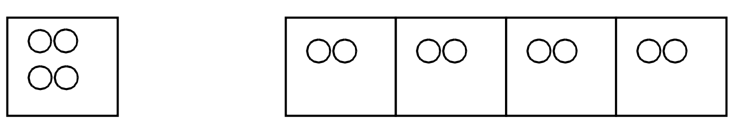


Figura 4.27

I ragazzi concludono:

> Federico: Per dire più dolce o più zuccherato dobbiamo pensare a un rapporto tra quantità di acqua e quantità di zucchero.
> Conny: E noi sappiamo che il rapporto del primo è 0,5 : 4 = 1 : 8, il rapporto dei 2 litri è 2 : 8 = 1 : 4.
> Elena: Se scriviamo una proporzione con i rapporti dei due recipienti, vediamo proprio che non sono uguali e non si può fare.

Con i ragazzi di quest'età la seconda domanda è stata formulata diversamente: "**In quanti modi possiamo renderli dolci uguali?**"

> Giovanna O.: Da mezzo litro per arrivare a 2 litri c'è bisogno anche di altri cucchiaini di zucchero, quindi quello da 2 litri per essere dolce come quello da mezzo litro deve avere il doppio dei cucchiaini di quelli che già ha.
>
> Brigida: Io invece penso che sia così: siccome in mezzo litro ci sono 4 cucchiaini di zucchero vuol dire che in 2 litri ce ne devono essere 16, poiché nel secondo recipiente per ogni litro ci sono 4 cucchiaini, per averne 4 ogni mezzo litro, ne dobbiamo aggiungere 8 e arriviamo a 16 cucchiaini.
>
> Vittoria M. e Giovanna T.: Dobbiamo aggiungere a quello di mezzo litro 1,5 litri di acqua e i 4 cucchiaini di zucchero.

Molti la pensano come loro.

> Maurizio: Possiamo renderli dolci uguali aggiungendo mezzo litro di acqua nel recipiente dove c'è meno acqua e lasciare invariato il numero dei cucchiaini di zucchero.
>
> Federico: Bisogna aggiungere 8 cucchiai a quello da 2 litri. Poi possiamo fare che in 2,5 litri ci sono 10 cucchiai, e nella brocca di 0,5 litri aggiungiamo 2 litri con 6 cucchiai.
>
> Filomeno: In quella da 0,5 litri aggiungo 1,50 litri con 12 cucchiai e in quello di 2 litri ne aggiungo 8, così sono uguali.
>
> Nicol: Secondo me, basta aggiungere 8 cucchiai al secondo recipiente.
>
> Elena e Brigida: Se aggiungiamo a un mezzo litro, 2,5 litri e a quello di 2, un litro, abbiamo la stessa quantità d'acqua. Poi a quello di 0,5 litri dobbiamo aggiungere 4 cucchiaini di zucchero, così abbiamo la stessa quantità di zucchero e di acqua.
>
> Docente: Tra i linguaggi che conoscete ce n'è qualcuno più efficace che potete utilizzare per rappresentare la situazione?
>
> Conny: Faccio una tabella.
>
> Elena: Si possono fare gli assi cartesiani.
>
> Giovanna T.: Lì scriviamo i punti e li congiungiamo.
>
> Giuseppe C.: L'ho fatto! Congiungendo i punti ottengo una retta e non l'iperbole come per i rettangoli.[31]
>
> (Si veda la figura 4.28).

---

[31] Giuseppe si riferisce ad un'attività di esplorazione di rettangoli equiestesi che aveva dato luogo, sul piano cartesiano, ad un ramo di iperbole

A questo punto non ho avuto difficoltà a sistemare formalmente le grandezze direttamente ed inversamente proporzionali. Chiedo ai ragazzi di rappresentare i due rapporti di "dolcezza" sullo stesso grafico (figura 4.29).

> Vittoria F.: Sono venute due rette, una più su ed una più giù.
> Antonio: $y = 8x$ è quella del mezzo litro e $y = 4x$ quella dei 2 litri, perché nella prima in un litro ci sono 8 cucchiaini mentre nella seconda ve ne sono 4.

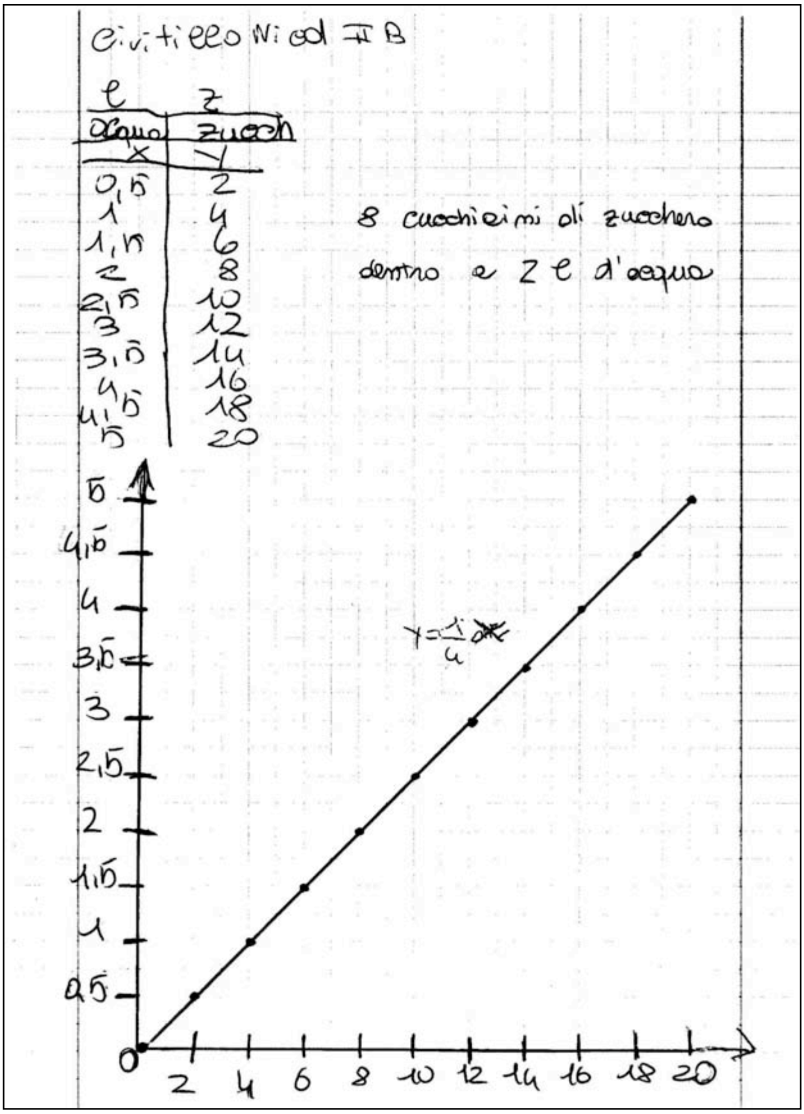


Figura 4.28

Vittoria F.: Quindi quella del mezzo litro si vede che è più concentrata, è anche più in alto.
Antonio: Mentre quella meno concentrata è più bassa.

I ragazzi cominciano a costruire la semantica del coefficiente angolare.

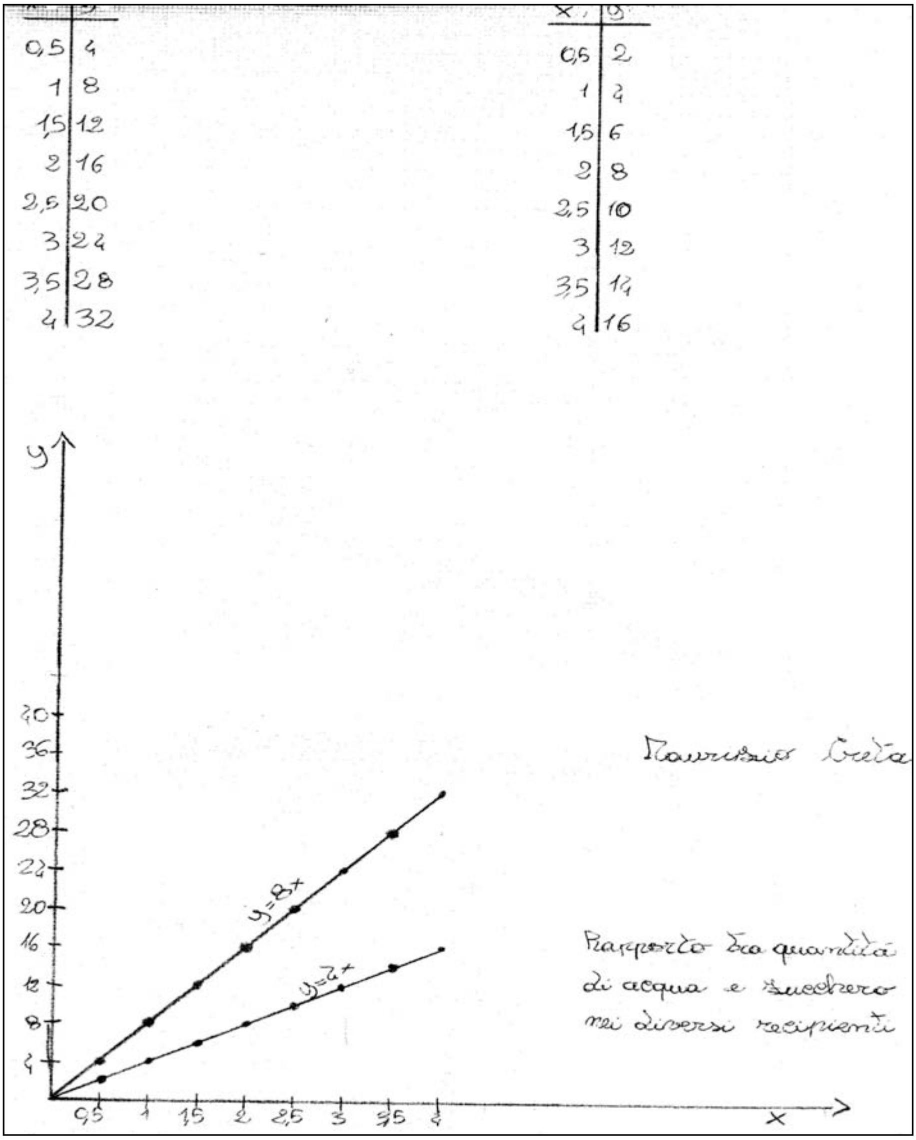


Figura 4.29

Considerazioni dell'insegnante

La metodologia applicata dà la possibilità di sviluppare molte competenze trasversali: infatti consente di comunicare, di discutere le proprie soluzioni, di costruire ragionamenti, di individuare generalizzazioni, di formulare ipotesi, di rappresentare, quindi di argomentare, sostenere le proprie affermazioni, validare la propria attività matematica. Significa dar fiducia ai ragazzi e far crescere le loro responsabilità.

Bisogna fare attenzione e coinvolgere tutti perché alcuni potrebbero essere più attivi, altri potrebbero distrarsi. L'abitudine a questo tipo di lavoro conduce però ad essere coinvolti per curiosità, per vivacità intellettuale o per non essere da meno nei confronti degli altri.

Nelle situazioni tradizionali l'insegnante pensa di essere il vero responsabile della riuscita dei propri allievi, per cui tende a dirigere il lavoro, ad aggirare gli ostacoli e ad evitare gli errori per indicare la via "giusta", utilizzando le strategie ritenute più efficaci. Per questo motivo si potrebbe ritenere un intralcio un'attività del genere che giunge alla soluzione attraverso tante congetture e tante difficoltà. Questo potrebbe essere il lato negativo della situazione: se non si è in grado o non si ha voglia di gestire situazioni fluide dove bisogna dirigere e orientare una discussione, ascoltare le idee di tanti, rivedere false convinzioni ma anche educare al confronto e al rispetto delle opinioni altrui, si preferisce la solita lezione "trasmissiva" di saperi.

Abituarsi invece al laboratorio matematico ha grandi vantaggi perché gli argomenti penetrano profondamente in quanto avviene con la classe *"la costruzione della conoscenza"* e il tempo che ingannevolmente si pensa di "perdere" si recupera nel verificare la solidità dell'apprendimento e la versatilità della conoscenza non più considerata in senso univoco, formale, ma finalmente viva, che consente di interpretare la realtà.

Infine dà la possibilità di trovare analogie strutturali tra diversi campi di esperienza. Ad esempio i ragazzi hanno riconosciuto nel parlare di concentrazione i concetti di densità e di velocità.

6. Scuola dell'infanzia di Cusano Mutri.

Insegnante Concetta Maria Torrillo

Ad una sezione eterogenea di bambini di 3, 4 e 5 anni l'attività viene proposta in forma diversa, adattando la fiaba de *La Bella Addormentata*. Viene proposta la fiaba poiché i bambini sono abituati ad individuare, attraverso un racconto opportunamente scelto dall'insegnante, situazioni problematiche.

Ad ogni fata viene attribuito un colore per far sì che i bambini possano avere anche la percezione visiva dell'esperienza.
La storia è stata seguita con molto interesse da tutti i bambini; le discussioni che si riportano sono avvenute in una serie di incontri successivi poiché l'età dei piccoli "scienziati" non permetteva tempi di attenzione lunghi.
Dopo aver letto la storia si discute con i bambini delle tre fate, del loro nome e delle differenze. Si dispongono sul tavolo tre recipienti di diversa grandezza per fare le pozioni…
Dopo l'ascolto e le conversazioni, i bambini attribuiscono alle tre fate, di grandezza diversa, tre recipienti anch'essi di varie dimensioni e cominciano ad osservare:

> Maestra: Mettiamo l'acqua e prepariamo le pozioni delle fate: tutte dolci allo stesso modo.
> Antonio: Ci vuole più zucchero in quello grande, di meno in quello medio e di meno in quello piccolo.
> Raffaele: Però in quello grande ci vuole più zucchero, in quello medio un po' di meno e in quello piccolo poco poco.
> Cristian: Devi mettere un cucchiaio in ogni barattolo.
> Antonio: Ci vogliono 3 cucchiai in tutti e tre altrimenti come fa ad essere zuccheroso?
> Raffaele: In quello piccolo ci va meno zucchero e in quello grande di più.

Si decide insieme di versare 3 cucchiai di zucchero in ciascun recipiente e si rimane ad osservare.

> Erminia: In quello grande lo zucchero sembra di meno.
> Maestra: Ma io ho messo lo zucchero in uguale quantità.
> Annamaria: Lo zucchero si è sparso nel barattolo grande perché il barattolo è largo.
> Giovanna: Quello grande ha più zucchero perché è più grande, quello medio un po' di meno perché il barattolo è un po' più piccolo di quello grande.
> Antonio: Quello grande è più largo e lo zucchero si è disperso, in quello piccolo è tanto perché è più stretto.
> Giulia: Quello grande e quello medio sono tutti e due un po' grandi.
> Cristian: In quello piccolo c'è meno acqua e più zucchero; in quello grande c'è più acqua. Se voglio farli uguali devo mettere più zucchero.
> Giuseppe: Nel piccolo c'è più zucchero, nel medio di meno e nel grande ancora di meno.

Segue la fase di rappresentazione dell'esperienza (figure 4.30, 4.31, 4.32).

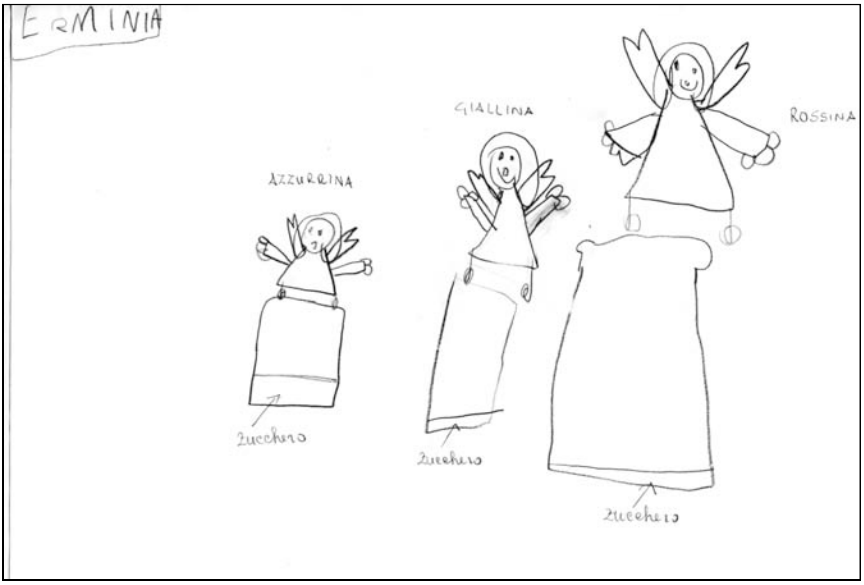


Figura 4.30

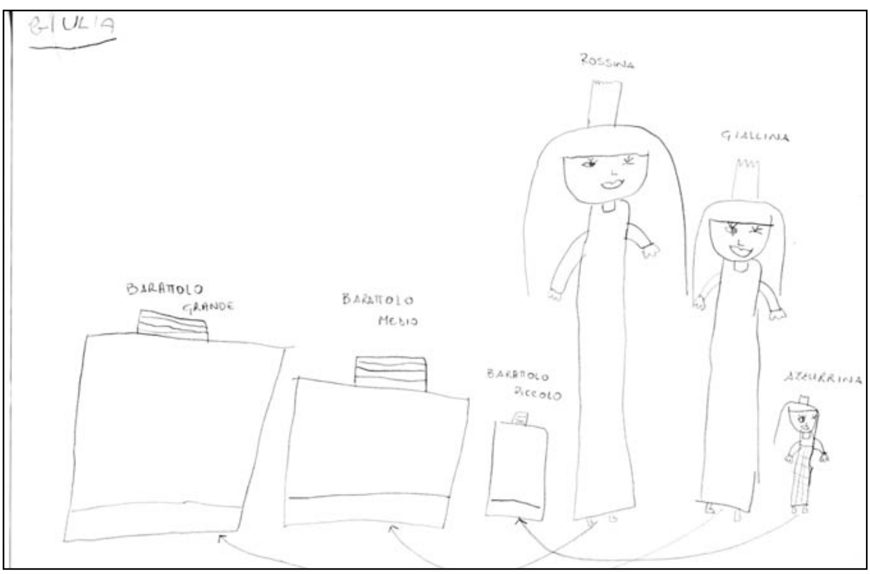


Figura 4.31

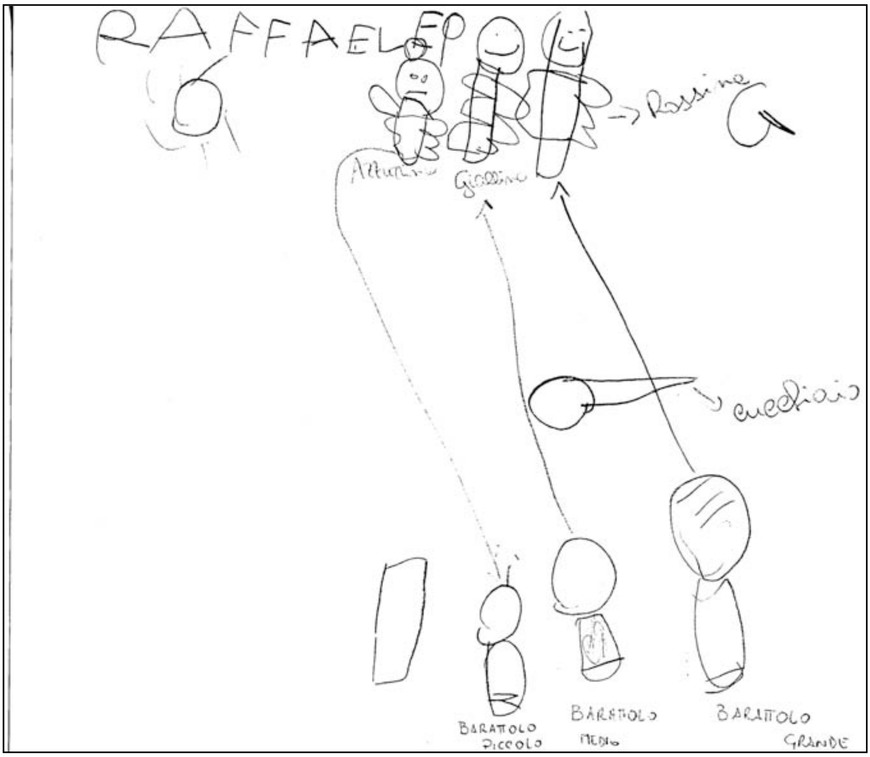


Figura 4.32

7. Scuola Primaria di Cusano Mutri. Classe III.

Insegnante Filomena Di Biase.

Viene proposta la fiaba *La Bella Addormentata* per creare una prima situazione di ascolto anche in una classe terza di scuola primaria, fiaba scelta da parte dell'insegnante di italiano in collaborazione con quella di matematica. Gli alunni non hanno mai vissuto una situazione di laboratorio in mancanza di dati.

Viene letta la storia fornendo anche tre contenitori di diversa capacità pieni di acqua: di 1 litro, ½ litro e ¼ di litro e viene prospettato agli alunni il seguente quesito:

Le fate devono zuccherare le loro pozioni allo stesso modo. Come fate ad aiutarle?

Gli alunni sono visibilmente a disagio senza dati, ma dopo un poco avviano le prime congetture.

Francesco: Ci vuole un cucchiaio di zucchero in ogni barattolo.

Vittoria: Ci vuole più zucchero in quello grande, di meno in quello medio e meno ancora in quello piccolo.
Roberto: Per me ci vuole un cucchiaio nel barattolo piccolo, in quello medio un cucchiaio e mezzo e nel barattolo grande due cucchiai.
Michele: In quello grande due, perché la quantità di acqua è di più.
Leonardo: Secondo me ci vuole un cucchiaio nel barattolo piccolo, due in quello medio e tre in quello grande.
Domenico: Perché se nel barattolo piccolo c'è più zucchero diventa più zuccherato degli altri.

Viene accettata da tutta la classe la proposta di Leonardo ed effettivamente si aggiunge all'acqua lo zucchero che si deposita sul fondo.

Concetta: Nel barattolo piccolo sembra che c'è più zucchero perché il barattolo è piccolo.

Gli alunni, dopo vari ragionamenti e tentativi, hanno disegnato la situazione verificatasi usando come unità di misura i quadratini del foglio di lavoro (figure 4.33 e 4.34). Qualcuno ha ragionato sul rapporto 1/1: cioè un quadretto per una quantità unitaria di zucchero.

Figura 4.33

Figura 4.34

Commenti dell'insegnante

L'esperienza vissuta con i bambini ci fa riflettere sulle infinite possibilità offerte dall'esperienza pratica. Ci si è resi conto di quanto, a scuola, sia indispensabile creare opportuni spazi e tempi in cui rendersi disponibili all'ascolto delle concezioni che i bambini esprimono e ai modi della loro formulazione; dare spazio alle loro domande evitando risposte premature; saper innescare processi individuali e collettivi di ricerca e di chiarificazione mediante l'osservazione, la sperimentazione e la discussione collettiva, dando spazio anche alla confusione spontanea finalizzata allo scambio immediato di entusiasmo che si crea attorno ad una nuova scoperta; promuovere il pensiero critico; valorizzare la prospettiva personale ed il pensare con la propria testa senza penalizzare l'errore. Sono state create opportunità senso-percettive con oggetti, utensili, ed elementi vari, svolgendo attività che uniscono alla valenza scientifica un particolare carattere motivante.

8. Scuola dell'Infanzia e primo anno della Scuola Primaria di Montefalcone Valfortore.

Insegnanti Brunella Brillante e Roberta Virgilio.

La scelta dell'argomento "la proporzione" è nata dalla riflessione che la concretezza delle forme e delle grandezze è vissuta costantemente dal

bambino nella realtà di tutti i giorni. Il progetto è stato realizzato con le bambine e i bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia e del primo della scuola primaria, perché questi due anni segnano il passaggio tra due diversi ordini di scuola e di maturità e sono molto affini come livello di sviluppo, quindi gli obiettivi, sia generali che specifici, sono comuni.
Abbiamo utilizzato una fiaba *La principessa Fiordaliso* (vedi *La bella addormentata nel bosco*) quale brain-storming, in seguito siamo passate all'utilizzo di materiale strutturato quale: contenitori di diversa forma, colore, grandezza; zucchero, acqua e tempere per soluzioni colorate.
Tutto ciò ha una ricaduta sul piano didattico nel senso che:

- Non è conveniente aspettare le competenze matematiche adeguate per formalizzare le cose di cui si parla, ma anzi cominciare a parlarne stimola la formalizzazione;
- Sviluppare in simultanea i due aspetti può reinnescare il naturale intreccio pensiero-parola.

Punto di forza di tutto il progetto è stata la versatilità, flessibilità ed elasticità dei bambini di uscire ed entrare in personaggi e situazioni con semplicità, e di formulare pensieri più complessi in relazione alla loro età.

L'esperienza dei bambini
I bambini di cinque anni della Scuola dell'Infanzia, e i bambini del primo anno della Scuola Primaria, sono seduti in cerchio e una maestra legge la fiaba delle fate: Rossina, Giallina e Azzurrina.
I bambini insieme ripetono la fiaba e alla fine, insieme alle maestre, concordano che, per aiutare la principessa Fiordaliso, vittima di un terribile maleficio da parte di una fata cattiva, devono aiutare le fate a preparare una pozione magica buona. Paolo e Damiano affermano che per fare le pozioni delle streghe ci vogliono cose brutte e puzzolenti. Per fare le pozioni delle fate buone invece Carmine afferma che ci vogliono delle cose buone, dolci, ad esempio lo zucchero.
A questo punto prendiamo dello zucchero e tre brocche, una grande, una media e una piccola e in ognuna versiamo dell'acqua; due litri nella grande, un litro nella media e mezzo litro nella piccola.
I bambini decidono che le tre pozioni devono essere dolci allo stesso modo. Nicola Nunzio afferma che per fare in modo che l'acqua delle tre brocche diventi dolce allo stesso modo bisogna mettere sei cucchiai di zucchero in ogni brocca. Mariaflora dice che bisogna mettere sei cucchiai nella brocca grande, cinque nella brocca media e quattro nella brocca piccola.

A parte Mariaflora, i bambini continuano ad affermare che la dolcezza dell'acqua non dipende dalla quantità dell'acqua stessa, ma solo dallo zucchero. Per indurli a guardare entrambe le variabili, le insegnanti decidono di evocare la grande quantità di esperienze di vita quotidiana che i bambini hanno sull'argomento. Così la maestra prepara un caffè e come fa di solito mette una bustina di zucchero, poi prepara un altro caffè nel quale versa ancora una bustina di zucchero; quindi chiede ai bambini se i due caffè sono dolci uguali e che cosa succederebbe se lei versasse i due caffè in un unico bicchiere. I bambini rispondono che i due caffè sono dolci uguali ed evocando gesti quotidiani, la mamma che zucchera il caffè al mattino, rispondono che secondo loro il caffè nel bicchiere grande non diventa più dolce perché anche mamma versa, a seconda della moka, da due o da tre tazze, tanto zucchero quante sono le tazze di caffè della moka.
Daniel allora suggerisce alla maestra di fare la stessa cosa con le tre brocche d'acqua, cioè di versarne il contenuto in una brocca più grande "così diventano dolci uguali". Il bambino ha colto la semplificazione dell'operazione precedentemente eseguita (la maestra che versa i due bicchierini di caffè in un bicchiere più grande).
Occorre riportare l'attenzione sulle tre brocche e sulla quantità di acqua e zucchero in esse contenuta; così prende tre bicchieri di plastica e in ognuno versa una bustina di zucchero e una quantità differente di acqua, che definisce approssimativamente in "un poco", "metà", "pieno"; poi chiede a Daniel se i tre bicchieri sono dolci uguali. Daniel è perplesso, allora Carmine afferma che più acqua si mette nel bicchiere e più diventa "meno dolce" e osserva che l'acqua nelle tre brocche non è di uguale quantità. Carmine, infatti, attingendo alla propria esperienza quotidiana, racconta di quando lui, al mattino, prepara il latte col Nesquik: ricorda che più latte aggiunge nella tazza, meno scuro è il colore del contenuto, meno dolce è il latte.
Giorgia dice che per essere vero quello che dice Nicola Nunzio, nelle tre brocche ci deve essere la stessa quantità di acqua. A questo punto si ritorna alle affermazioni precedenti perché l'evocazione di Carmine ha fatto scattare la riflessione sulla quantità di acqua e zucchero. L'insegnante riempie tre bicchieri con la stessa quantità di acqua e Giorgia mette sei cucchiai di zucchero per bicchiere. Marzia, invece, mette quattro cucchiai in tutte e tre le brocche. Carmine interviene dicendo che ciò può essere vero per i bicchieri che contengono la stessa quantità di acqua ma non per le brocche che sono di grandezza diversa. La maggioranza dei bambini è d'accordo con Marzia.

Antonio dice: Nella brocca grande devi mettere otto cucchiai, nella media quattro, e nella piccola due. L'insegnante chiede ad Antonio di dimostrare a modo suo quello che ha appena affermato. Antonio allora si guarda intorno e si dirige verso lo scaffale dal quale prende dei pennarelli e ne mette otto vicino la brocca grande, quattro vicino la brocca media e due vicino la brocca piccola, ma non sa spiegare perché. Carmine intuisce il pensiero di Antonio e cerca di spiegare dicendo: "Due pennarelli davanti alla brocca piccola, quindi quattro davanti alla media perché due più due fa quattro… L'insegnante interviene facendo notare al bambino che se procede aggiungendo 2 pennarelli non arriverà a 8, perché 2 + 2 = 4, 4 + 2 = 6 e non 8. Carmine spiega alla maestra che lui aveva intenzione di fare 4 + 4 perché non sta utilizzando il +2 ma il doppio del numero "che viene prima".
A questo punto la maestra mette otto cucchiai di zucchero nella brocca grande, quattro nella brocca media e due nella brocca piccola.

> Danilo: A me sembra che nella brocca piccola c'è più zucchero.
> Maicol: L'acqua della brocca grande è più dolce perché c'è più zucchero.
> Antonia: L'acqua della più piccola è più dolce perché ci sono due cucchiai di zucchero e c'è meno acqua.
> Carmine: Lo zucchero si scioglie di più nella brocca grande perché c'è più acqua, e nella piccola non si scioglie perché c'è meno acqua.

A questo punto, per dimostrare questa affermazione, con l'utilizzo di un secchio e di un bicchiere di plastica, abbiamo sperimentato che nella brocca piccola vanno due bicchieri di acqua, nella brocca media quattro e nella brocca grande otto, e tutti hanno detto che bisognava mettere otto cucchiai di zucchero nella grande, quattro nella media e due nella piccola. Quando abbiamo chiesto se l'acqua delle tre brocche "era dolce uguale", i bambini hanno risposto che l'acqua più dolce era quella della brocca piccola. Alla domanda del perché, secondo loro, era più dolce l'acqua della brocca piccola, quasi tutti hanno risposto (anche perché si sono "influenzati") perché lo zucchero "sotto l'acqua" non si era sciolto.
Nonostante tutte le argomentazioni prodotte nelle sedute laboratoriali, i bambini, che pure hanno utilizzato termini quali: piccolo, medio, grande, di più, di meno, tanto, poco, uguale ed hanno formalizzato con disegni e strumenti di misurazione non convenzionali, il percorso verso l'individuazione e la formalizzazione del rapporto tra le due variabili, non sono riusciti a cogliere la proporzione acqua/zucchero, quindi per il

prossimo step si procederà con nuove strategie di individuazione e risoluzione del problema.

Appendice

Accordo di Rete

Si riporta di seguito l'accordo con il quale è stata costituita la Rete "Galileo".

Accordo di Rete
"Galileo"

Le Istituzioni Scolastiche

2° Circolo Didattico di Benevento, nella persona del D. S. Gilda Lemmo Iannazzone,
3° Circolo Didattico di Benevento, nella persona del D. S. Michele Ruscello,
5° Circolo Didattico di Benevento, nella persona del D. S. Giulio De Cunto,
Istituto Comprensivo "Falcetti" di Apice, nella persona del D. S. Maria Gabriella Fedele,
Istituto Comprensivo "Leopardi" di Apollosa, nella persona del D. S. Leucio Antonio Travagliane,
Istituto Comprensivo "De Dominicis" di Buonalbergo, nella persona del D. S. Marina Mupo,
Istituto Comprensivo di Calvi, nella persona del D. S. Maria Luisa Fusco,
Istituto Comprensivo di Ceppaloni, nella persona del D. S. Rosetta Russo,
Istituto Comprensivo "Kennedy" di Cusano Mutri, nella persona del D. S. Giovanna Caraccio,
Istituto Comprensivo di Fragneto Monforte, nella persona del D. S. Maria Buonaguro,
Istituto Comprensivo di Montefalcone Valfortore, nella persona del D. S. Maria Gaetana Ianzito,
Istituto Comprensivo "De Filippo" di Morcone, nella persona del D. S. Giovanna Leggieri,
Istituto Comprensivo "San Pio" di Pietrelcina, nella persona del D. S. Anna Immacolata Colarusso,
Istituto Comprensivo di S. Angelo a Cupolo, nella persona del D. S. Anna Signoriello
Istituto Comprensivo di S. Leucio del Sannio, nella persona del D. S. Antonia Vorrasi

Scuola Secondaria di 1° "Moscati" di Benevento, nella persona del D. S. Ernestina Cassese,
Scuola Secondaria di 1° "Pascoli" di Benevento, nella persona del D. S. Norma Fortuna Pedicini,
Scuola Secondaria di 1° "Torre" di Benevento, nella persona del D. S. Raffaele Mignone,

- Visto il DPR 275/99, Regolamento in materia di autonomia delle istituzioni scolastiche, con particolare riguardo all'art. 6 (Autonomia di ricerca, sperimentazione e sviluppo) e all'art. 7 (Reti di scuole)

- Considerato opportuno interagire con le iniziative poste in essere dal Ministero della Pubblica Istruzione per il rinnovamento della pratica didattica delle discipline scientifiche e della matematica, quali il Progetto Insegnare Scienze Sperimentali (I.S.S.) e il Progetto MAT@BEL per la matematica, il finanziamento per i laboratori scientifici previsti dal progetto "Scuole Aperte", i finanziamenti previsti nel PON "La scuola per lo sviluppo", ecc.

- Ritenute valide le indicazioni contenute nei due Documenti prodotti dal Gruppo di Lavoro Interministeriale per lo Sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica costituito con Decreto del 4 agosto 2006 dal Ministro dell'Università e della Ricerca, dal Ministro della Pubblica Istruzione, dal Ministro per le riforme e le innovazioni nella Pubblica Amministrazione e dal Ministro per i Beni e le Attività Culturali (Documento di base del dicembre 2006 e Documento di lavoro del maggio 2007), in cui "si raccomanda a tutti i principali soggetti coinvolti nello sviluppo della cultura scientifica e tecnologica come la scuola, l'università, le istituzioni e le organizzazioni culturali, le associazioni, il mondo del lavoro, le imprese, i media e i diversi soggetti sociali, di non affrontare il problema separatamente, ma di creare un sistema a rete in cui i diversi soggetti interagiscano e cooperino"

- Considerato necessario che i docenti possano essere messi nelle migliori condizioni per riflettere sul curricolo verticale delle varie discipline, anche alla luce delle nuove Indicazioni per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo dell'istruzione, con i relativi quadri di riferimento concettuali, che dovranno essere opportunamente sviluppati e precisati

- Constatata la volontà delle suddette Istituzioni Scolastiche di cooperare per garantire la crescita complessiva dell'offerta formativa sull'intero territorio sul quale esse operano

Convengono quanto segue:

- E' costituita una rete di scuole della provincia di Benevento, denominata "Rete Galileo", per l'attuazione di una sperimentazione didattica per l'innovazione dell'insegnamento della matematica e delle discipline scientifiche, mediante la costituzione di Gruppi di ricerca-azione costituiti da docenti della scuola dell'infanzia, della primaria e della secondaria di 1°.

- Le Istituzioni Scolastiche si impegnano a mettere a disposizione della rete le risorse umane ed i propri laboratori per l'attuazione della sperimentazione, integrando fra di loro in modi opportuni le risorse culturali e materiali via via acquisite da ciascuna (formazione professionale, attrezzatura di laboratori, corsi-prototipo di laboratorio per i ragazzi, biblioteche e mediateche, ecc); le stesse parteciperanno ad eventuali Piani o Progetti a livello regionale o nazionale garantendo la loro integrazione funzionale con la ricerca-azione cooperativa.

- Le Istituzioni Scolastiche partecipanti alla rete struttureranno, all'interno del proprio Collegio dei Docenti, un dipartimento di matematica e scienze, che coinvolga in modo articolato tutti gli insegnanti dell'area per la programmazione, lo sviluppo e l'uso dei laboratori, la valutazione, la formazione professionale (disciplinare e metodologica); ciascun dipartimento designerà un proprio referente, responsabile della organizzazione e gestione interna e della gestione delle relazioni esterne con analoghi dipartimenti della rete di scuole, con l'Università, con Musei e altre strutture del territorio.
L'eventuale impegno aggiuntivo dei docenti sarà riconosciuto nelle contrattazioni integrative delle singole Istituzioni Scolastiche.

- Le Istituzioni Scolastiche della rete si impegnano, in quanto rete, per il reperimento di risorse disponibili sul territorio, e per il coinvolgimento dei genitori nei processi di innovazione, supporto e gestione dell'attività didattica in area scientifico-matematica attivati dalle scuole stesse. Eventuali spese necessarie per il funzionamento della rete saranno deliberate dal gruppo di gestione della rete e condivise tra le Istituzioni

Scolastiche. Eventuali contributi alla rete da parte del Ministero o di altri Enti territoriali saranno gestiti dalla scuola polo per l'intera rete di scuole.

- La rete si avvarrà della collaborazione scientifica delle Università e dei singoli docenti che si occupano di ricerca didattica, a partire da quelli che operano in Campania.
Università e Istituzioni Scolastiche collaboreranno nella impostazione, gestione e documentazione di progetti di ricerca-azione finalizzati all'innovazione educativa in ambito scientifico-matematico, che contemplino da un lato il coinvolgimento diretto degli insegnanti e delle loro classi, dall'altro una rivisitazione su base di ricerca delle modalità di presentazione dei contenuti disciplinari e di gestione del lavoro in classe, avendo di mira il miglioramento di comprensione, competenza e motivazione da parte di insegnanti e ragazzi

- Le Istituzioni Scolastiche della rete si impegnano a realizzare e diffondere specifiche forme di feedback (documentazione critica su difficoltà successi e problemi aperti) in relazione al lavoro svolto, in modo da renderlo utilizzabile sia per una sua progressione qualitativa sia per una sua condivisione-diffusione allargata; in particolare ritengono importante perseguire obiettivi cognitivi e culturali di differenziazione da un lato e di reciproca integrazione dall'altro fra conoscenze-competenze di tipo matematico e scientifico ("trasversalità"), nonché obiettivi di continuità e coerenza di sviluppo culturale attraverso gli anni ("verticalità").

- Le Istituzioni Scolastiche si propongono di organizzare una rete informatica che, con la consulenza scientifica dell'Università, sostenga e incentivi la ricerca attraverso interazioni e scambi di diverso tipo (forum, archivi di materiali, produzione condivisa, bibliografie, ecc), così che forme diverse di innovazione-prototipo possano essere realizzate e monitorate in una parte delle scuole o delle classi, in prima battuta, per essere poi estese alle altre in forme validate dall'esperienza.

- Il Gruppo di gestione della rete è formato da tutti i Dirigenti Scolastici delle istituzioni partecipanti. Ad inizio di ogni anno scolastico il Gruppo di gestione si riunisce per definire le modalità operative della rete.

Il ruolo di scuola polo è assunto, a rotazione, dalle istituzioni partecipanti; per l'a. s. 2008/2009 la scuola polo è il 5° Circolo Didattico di Benevento.
Il Dirigente della scuola polo funge da coordinatore della rete. Il referente della scuola polo funge da coordinatore di tutti i referenti.

- Al termine di ogni anno scolastico i Dirigenti Scolastici ed i referenti dei vari Istituti presenteranno una relazione ai rispettivi Collegi dei Docenti e Consigli di Istituto sullo stato di attuazione dell'accordo di rete.

- La durata dell'accordo è triennale: Successivamente si intende rinnovato di anno in anno a meno che non vi sia una delibera in senso contrario da parte di uno dei Collegi dei Docenti o Consigli d'Istituto.

- Il presente accordo è estensibile alle altre Istituzioni Scolastiche presenti sul territorio.

Benevento, 30 settembre 2008

Finito di stampare
nel marzo 2010
Laboratorio Edizioni Il Chiostro
Viale dei Rettori, 34 – Benevento