

## Più matematica per chi insegna matematica

M. Dedò, settembre 2001

La domanda a cui mi è stato chiesto di rispondere in questo intervento è una domanda estremamente vasta: quale può essere il significato della ricerca nel campo della didattica della matematica; quale può essere tale significato oggi in Italia, con un occhio a ciò che accade nel mondo e un inquadramento in ciò che è accaduto in passato, prendendo le mosse in particolare da due articoli la cui traduzione in italiano è stata recentemente pubblicata su questa stessa rivista ([1] e [2]).

Non pretendo certo con quanto segue di fornire delle risposte esaurienti a una questione tanto complessa e articolata, ma mi propongo piuttosto di offrire qualche spunto di riflessione sottolineando alcune fra le tante sfaccettature coinvolte, alla luce delle esperienze che ho avuto negli ultimi anni sia rispetto al problema della formazione degli insegnanti (nell'ambito dei corsi di laurea in Scienze della Formazione Primaria e della Scuola di Specializzazione), sia con le varie iniziative proposte dal Dipartimento di Matematica di Milano (corsi di aggiornamento, corsi di perfezionamento, mostre, cicli di conferenze) e dirette al mondo della scuola e degli insegnanti in servizio.

Dirò quindi subito che, fra i due punti citati da Schoenfeld all'inizio del suo articolo come scopi della ricerca didattica (l'analisi della natura del processo del pensiero matematico, e il tentativo di migliorare l'istruzione matematica), la mia attenzione sarà qui rivolta al secondo più che al primo. È evidente che questi sono fra loro collegati: il secondo fornisce al primo motivazioni e finalità, mentre il primo è uno degli aspetti che possono concorrere a un'effettiva realizzazione del secondo. Ma dicendo che è "uno degli aspetti" voglio anche sottolineare che (a mio avviso) non è il solo: la tesi che cercherò di argomentare in quanto segue è proprio che altri aspetti sono altrettanto e forse addirittura più necessari in questo momento: come si dice nel titolo, ci vuole più matematica per chi insegna matematica!

### L'ozio creativo

Non è questa naturalmente la sede per fare una disamina dei programmi ministeriali per la scuola; può essere utile però a mio avviso una riflessione di fondo su quali debbano essere i compiti della scuola e per farlo voglio provare a partire da una provocatoria esaltazione dell'ozio che si rifà al libretto di Bertrand Russell dal titolo "*Elogio dell'ozio*" ([3]).

Si tratta di una provocazione che mi sembra opportuna in questo momento in cui la scuola (e non solo la scuola) insiste sempre più sull'aspetto professionalizzante, e sulla "utilità", e sulla necessità "in quanto utili", dei concetti e delle capacità che nella scuola vengono trasmessi. E vorrei proprio rifarmi a Russell per cominciare a mettere in dubbio questo "assioma", e a discutere che cosa si debba davvero intendere per "utile".

Nella sua analisi Russell parte dalla considerazione che lo sviluppo della tecnica ha aperto la possibilità teorica che un'enorme quantità di tempo libero, una volta riservato solo a determinati ceti sociali, diventi patrimonio di tutti (perlomeno nella nostra società occidentale). Questa possibilità teorica è ulteriormente cresciuta da quando è stato scritto il libro citato, eppure le potenzialità di cui parla Russell non sono state minimamente sfruttate; viceversa, è enormemente aumentata l'utilizzazione che Russell chiama "passiva" del tempo libero, e questo grande cambiamento è stato sfruttato prevalentemente, in termini economici, da chi è interessato a farne un "business".

Viceversa, e qui entra massicciamente la scuola, Russell sottolineava che "... è essenziale che l'istruzione sia più completa di quanto lo è ora e che miri, in parte, ad educare e raffinare il gusto in modo che un uomo possa sfruttare con intelligenza il proprio tempo libero".

È utopia pensare a una scuola che educhi all'ozio creativo? Certamente stride la contraddizione con la "cultura" come emerge da certi quiz televisivi, dove si possono vincere centinaia di milioni per aver saputo dire chi è nato prima fra Giulio Cesare e Carlo Magno, o se il colibrì è un mollusco o un uccello (o chi è il protagonista di una certa telenovela...). Forse è vero che si tratta di un'utopia, ma mi pare ugualmente che possa essere utile spostare l'accento su questo aspetto, per cercare di capire quali sono i contenuti che davvero vogliamo come nuclei fondanti nella scuola.

E allora che cosa vogliamo per la matematica? Che cosa vogliamo tra le cose "che servono" e che cosa vogliamo tra le cose "che non servono"?

Mi piacerebbe che fossimo in grado di fare un parallelo tra quello che "serve" nello studio della matematica e quello che "serve" nello studio dell'italiano (e, anche, tra quello che "non serve" nello studio della matematica e quello che "non serve" nello studio dell'italiano). Per quanto riguarda l'italiano, io vedo (da profana, da "utente" del servizio di insegnamento) due aspetti ben distinti: c'è un aspetto che indubabilmente "serve", e serve a tutti, ed è l'imparare ad usare lo strumento linguistico, e a fianco c'è un aspetto prettamente culturale. Il primo è naturalmente articolabile in vari livelli, da quello di comunicazione elementare (capire e farsi capire), a quello che prevede un uso corretto della lingua, in contesti diversi,

senza strafalcioni grammaticali o sintattici, a uno ancora più fine in cui si possa sfruttare al massimo la ricchezza del vocabolario e delle costruzioni linguistiche per cogliere e per trasmettere le sfumature del pensiero. E perlomeno i primi due livelli vorremmo che fossero obiettivi della scuola dell'obbligo, cioè che facessero parte di quel bagaglio di conoscenze che dovrebbero essere patrimonio di tutti.

E per quanto riguarda l'aspetto "culturale"? credo che nessuno possa dire che nella sua vita gli sia "servito" conoscere a memoria dei versi di Dante, o essersi emozionato di fronte a una poesia di Montale, o avere imparato ad apprezzare la bellezza nella poesia di Leopardi; mi pare però altrettanto indubitabile che chi ha avuto la fortuna o la capacità di inserire dei "mattoni" di questo tipo nel proprio bagaglio culturale ne sia contento, e non ci rinunciarebbe, e se ne senta arricchito. Forse se ne è servito per l'ozio creativo di cui parla Russell, o forse li ha usati indirettamente, insieme ad altri "mattoni", per costruire uno strumento di interpretazione della realtà che è diventato poi parte di quello che è la persona stessa.

Quale può essere un parallelo per la matematica di una situazione del genere? Io ho l'impressione che, da un po' di tempo a questa parte, si stia mettendo troppo l'accento sulla "matematica che serve"; anche con certe forzature, probabilmente legate al timore che il fatto di dichiarare esplicitamente che certi capitoli della matematica non "servono" a nulla nella vita quotidiana di una persona "media" possa portare automaticamente a una loro eliminazione; come se non ci si sentisse autorizzati a proporre alcuni argomenti di matematica anche se non "servono" a nulla, ma per la sola motivazione che si tratta di tasselli culturali fondamentali, come può esserlo la poesia per l'italiano.

La matematica che davvero "serve" nella vita quotidiana (di tutti) è proprio pochina. Serve indubbiamente sapersi arrangiare con i numeri e non perdere la testa di fronte a un conto elementare, anche se contiene frazioni o percentuali; serve anche acquisire un minimo di sensibilità sulle forme e un minimo di linguaggio geometrico <sup>(1)</sup>; serve anche naturalmente avere un'idea sia pur vaga di probabilità, perlomeno quanto basta a difendersi dalle truffe; ma, se volessimo limitarci a ciò che è strettamente funzionale a qualche attività di vita quotidiana media, non serve molto di più.

Forse quello che più servirebbe (e che invece non viene normalmente inserito fra le cose "utili") è avere un atteggiamento "sano" nei confronti della matematica: intendo con

---

<sup>(1)</sup> Ricordo, per inserire un aneddoto, un'interminabile discussione tra un muratore, un'architetta e un geometra, che per dire che due muri non erano né paralleli, né perpendicolari e nemmeno a un angolo di 45°, usavano tre maniere complicatissime, e tutte diverse fra loro, con il risultato di non accorgersi che stavano tutti dicendo la stessa cosa.

questo il non lasciarsi sconvolgere di fronte alla necessità di un calcolo elementare (e il panico diffuso di fronte all'incombere dell'euro è un esempio di quanto ne siamo lontani), il non credere ciecamente a ogni notizia su giornali o TV detta in termini di numeri o peggio di percentuali "perché è un calcolo matematico e quindi ..." (dove il "quindi ..." sottintende due cose: che sicuramente è esatto, e che sicuramente io non sono in grado di controllarlo). E molto spesso (e su questo fronte è stata per me un'esperienza significativa il fatto di aver tenuto per due anni un corso di matematica agli studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria) quello di cui si avverte la mancanza generalizzata non è tanto una particolare "capacità", quanto piuttosto la coscienza di possedere questa capacità, e l'uso critico della stessa.

E in questo bagaglio elementare io vorrei mettere anche una sorta di "igiene" del ragionamento: non essere passivi di fronte a un ragionamento consequenziale, o presunto tale (consapevoli anche del fatto che non tutte le espressioni del pensiero possono o debbono essere ragionamenti consequenziali), rendersi conto quando viene confusa la condizione necessaria con la condizione sufficiente, o il quantificatore "ogni" con il quantificatore "esiste". E voglio sottolineare che, quando dico che mi piacerebbe che si uscisse dalla scuola dell'obbligo con gli strumenti critici sufficienti per saper operare queste distinzioni, non sto pensando a un contesto formalizzato, ma anche e soprattutto a un contesto esterno alla matematica: accorgersi che, se la pubblicità di una lotteria recita "se non giochi non vinci", questo non significa "se giochi, vinci" (anche se il messaggio nascosto mira a farcelo credere); o che, se una persona vestita di verde mi ruba il portafoglio, questo non significa che tutti coloro che sono vestiti di verde sono dei ladri (e se l'esempio sul colore del vestito è volutamente peregrino, l'analogo esempio con altre categorie di persone è purtroppo estremamente attuale).

Questi ultimi due aspetti (un atteggiamento curioso e consapevole anziché di rifiuto a priori, e uno spirito critico attento alle storture di ragionamento) sono un po' diversi dai precedenti, sia perché, oltre che effettivamente "servire" nel bagaglio di tutti, vanno anche nell'altra direzione, ossia nella direzione dell'affinamento culturale sganciato da una immediata "utilità", sia perché non li possiamo automaticamente associare a un "capitolo" di matematica, ma piuttosto a un certo modo di insegnare e imparare la matematica: li si possono acquisire scoprendo le regolarità del triangolo di Tartaglia, ma anche studiando i poliedri regolari, o in mille altre maniere. E in fondo poco importa quale sia stato l'argomento, purché si raggiunga l'obiettivo di far apprezzare un problema, un modo di ragionare, un'idea

(apprezzamento che facilmente può portare come conseguenza l'acquisizione dei due atteggiamenti che si diceva).

Questi due aspetti, peraltro, sono i soli che giustificano l'enorme numero di ore dedicato alla matematica nella scuola dell'obbligo: se dovessimo giustificarlo solo in base alla matematica "che serve", sarebbe ben difficile sostenere che non sia più "utile" imparare il nuoto o il karate o la fotografia.

E ciò ha a mio avviso almeno tre conseguenze, naturalmente collegate fra loro.

Innanzitutto la necessità di privilegiare i contenuti e le idee portanti rispetto agli strumenti e alle tecniche, di sottolineare quindi l'aspetto culturale e mettere in secondo piano l'aspetto "utilitaristico": non è certo mai automatico che si acquisiscano cose impalpabili e difficilmente "misurabili" come lo spirito critico o l'atteggiamento positivo verso la matematica, ma è ovvio che non li si possono acquisire da un insegnamento volto esclusivamente all'apprendimento di formule e regole di calcolo.

Secondariamente, l'opportunità di una maggiore elasticità sui capitoli di matematica da inserire nei programmi: tornando al parallelo con l'italiano, se vogliamo che un ragazzo acquisisca la capacità di interpretare e apprezzare la poesia, ha poca importanza che lo faccia leggendo Leopardi o leggendo Montale, mentre è ovvio che la può acquisire con un lavoro fatto bene su Montale (magari per il solo fatto che all'insegnante del momento è più congeniale), ma certo non con un lavoro fatto male su Leopardi.

In terzo luogo, uno sfondamento dei programmi. Mi pare che negli ultimi anni ci sia stata una frenesia di inserire – a tutti i livelli – sempre nuovi argomenti nei programmi (e sempre con la motivazione "che servono"), senza parallelamente sfrondarne altri e ripensare il percorso complessivo <sup>(2)</sup>. Può essere ottima cosa proporre sempre nuovi argomenti, purché sia chiaro che "non servono": e quindi che l'insegnante non si deve sentire obbligato a fare ad ogni costo tutto (e male), ma che può scegliere fra tante proposte quelle (poche) che in quel momento, con quella particolare classe, alla luce della sua personale cultura ed esperienza, ritiene più adatte; e può svolgerle approfonditamente, il che è l'unica possibilità per avere qualche chance di trasmettere quelli che abbiamo indicato come i due punti fondamentali. E stiamo pur certi che, se un progetto di questo genere riesce, si avrà di riflesso anche

---

(2) Va detto che si cominciano a intravedere dei segnali di controtendenza, ad esempio con la eliminazione della logica e degli insiemi dai contenuti proposti per la nuova scuola primaria nella riforma dei cicli (e qualunque sia lo sbocco che questa avrà, che resta al momento incerto, sembra di poter sperare che questo tipo di proposta – che corrisponde effettivamente a una maturazione di ripensamento sui contenuti – vada comunque avanti, anche in un contesto diversamente organizzato).

l'apprendimento delle tecniche che pure vogliamo lasciare nel bagaglio minimale irrinunciabile, anche se nel progetto stesso facciamo finta di ignorarle.

### **Il ruolo del buon senso.**

Siamo da tempo bombardati da statistiche spesso sconfortanti sugli esiti di test di vario tipo sulle capacità matematiche: test di passaggio dalle scuole medie alle scuole superiori, test di ingresso universitari, test di ammissione alle scuole di specializzazione per l'insegnamento ecc.; siamo anche circondati da una lamentosità diffusa e spesso anche abbastanza inutile, quando tende a scaricare il problema sul segmento scolastico precedente (o successivo). I docenti delle scuole superiori si lamentano di come arrivano i ragazzi mal preparati dalle scuole medie (e/o di come vengono trattati poi male all'università), i docenti universitari pensano che è tutta colpa di come funzionano male le scuole superiori, i docenti delle scuole medie lamentano il livello in cui arrivano i bambini dalle scuole elementari (e la scarsa considerazione delle competenze dei ragazzi quando poi arrivano alla scuola superiore) ecc.; e l'unico motivo per cui i docenti delle scuole di specializzazione non dicono ancora (forse...) che è tutta colpa dei corsi di laurea è che sono essi stessi in prima persona a insegnare in questi corsi di laurea.

Tutto ciò ha anche probabilmente degli elementi di verità, ma ha scarso costrutto. Se è vero, come forse lo è, che si sta assistendo a un calo di certe capacità, lamentarsi non serve, ma occorrerebbe analizzarne le cause, e soprattutto individuare e capire come sfruttare capacità alternative che possono viceversa essere aumentate negli ultimi anni (ed è probabile che esistano, a meno che non si pensi che siamo di fronte a una mutazione genetica dell'intera umanità in direzione del rimbecillimento collettivo), e individuare gli "antidoti" opportuni, ciascuno per il segmento scolastico che gli compete.

Uno di questi antidoti, che mi sembra sicuramente proponibile, e proponibile a tutti i livelli scolastici, ovviamente con sfumature diverse a seconda del livello, è il recupero del "buon senso".

Ciò significa in pratica, a mio avviso, sostanzialmente due cose, che sono quelle che cercherò di discutere in questo paragrafo, una rispetto al passato e una rispetto al futuro (del discente): rispetto al passato, occorre uno sforzo continuo per agganciare ogni conoscenza "nuova" alle conoscenze pregresse (e non solo matematiche) di chi sta apprendendo; in direzione del futuro, occorre tenere sempre presente che il nostro obiettivo è quello di creare degli strumenti che siano degli effettivi strumenti di conoscenza e che resistano quindi (sia pure sfumati e in sottofondo) anche nel lungo periodo.

Parto da qualche esempio, per chiarire quello che intendo. Leggo su “*Ma-Li*”, uno studio dell’IRRSAE della Toscana sulle conoscenze matematiche e linguistiche nel passaggio dalla scuola dell’obbligo alla scuola superiore ([4]), che di fronte a una domanda del tipo “Mescolando un litro di acqua a 30° e un litro di acqua a 60° si ottengono due litri di acqua a che temperatura?”, con possibili opzioni per 30°, 45°, 60°, 90°, ben il 33,7 % dei ragazzi a cui è stato sottoposto il quesito ha risposto “90°”. Non credo sia stato fatto, ma mi sembra fin troppo facile prevedere che, se la domanda fosse stata “Mescolando un litro di acqua fredda e un litro di acqua calda si ottengono due litri di acqua a che temperatura?” con possibili opzioni tra calda, fredda, tiepida e bollente, nessuno avrebbe risposto “bollente”. Cosa è successo allora? Sembra proprio che le conoscenze di normale “buon senso” non vadano assolutamente a influenzare, a dare dei parametri di controllo o di verifica su quello che viene richiesto di fare: il buon senso serve nella vita normale, dove ognuno ben sa che si può mescolare acqua calda e acqua fredda per fare il bagno, ma non certo per cuocere la pasta; ma se si tratta di matematica, il buon senso non serve, ci sono dei numeri e quindi si devono fare delle operazioni: tutto il bagaglio di conoscenze collaterali non esiste più (e che cosa sarebbe successo se fra le opzioni ci fosse stato anche “1800°”?).

Di esempi di questo tipo se ne potrebbero fare mille, e ognuno che abbia insegnato ha la sua personale raccolta di “perle” collezionate negli anni; ma voglio piuttosto portare come secondo esempio, che non necessita commenti, la “ratifica” di questo atteggiamento da parte di un giornale di enigmistica, che presentando un problema (in realtà anche abbastanza grazioso) chiede di determinare un certo numero “basandosi esclusivamente sul ragionamento, OSSIA senza alcun ricorso alla matematica” (la sottolineatura del maiuscolo è mia, il resto è citazione testuale <sup>(3)</sup>).

Un terzo esempio su cui mi pare valga la pena di riflettere è quello citato da Lucio Russo nel suo intervento nel volume “*Matematica e cultura 2000*” ([5]): Russo cita la conclusione di un racconto di Edgar Allan Poe, in cui l’autore commenta l’opinione secondo cui, se il sei è già uscito due volte a un giocatore di dadi, allora c’è da scommettere sulla maggior probabilità che non esca a una terza giocata. Poe ritiene che questo sia giusto e aggiunge che sembra un fatto “immediatamente respinto dall’intelletto”, perché “la possibilità di tirare di nuovo sei sembra identica a quella precedente in un momento qualunque”; invece le cose stanno così, come “soltanto un matematico può comprendere a fondo”.

---

<sup>(3)</sup> Settimana Enigmistica, n. 3380, 4-1-’97.

Il brano fa effettivamente impressione, non tanto per l'ignoranza di Poe in fatto di calcolo delle probabilità, ma per la constatazione che ai tempi di Poe affermazioni assurde apparivano tali anche alla luce del solo "buon senso", mentre analoghe affermazioni si sentono oggi in giro tutti i giorni a proposito del superenalotto o altri giochi analoghi, senza che il "buon senso" sembri minimamente intervenire a smascherarle.

L'interpretazione (argomentata) di Russo è che ci sia effettivamente stato un peggioramento delle intuizioni dei non matematici sui fenomeni matematici e che questo peggioramento vada attribuito in gran parte alla disinformazione provocata da una cattiva divulgazione, ridotta a un'infarinatura scientifica controproducente: "la consuetudine con una scienza di cui non si capisce la logica interna, ma della quale si ammira la potenza, indebolisce gravemente la fiducia della gente comune nel buon senso".

Naturalmente il piano della divulgazione è un piano diverso da quello della didattica: essi hanno però un comune denominatore nel cercare di trovare forme di comunicazione con cui rendere partecipi di concetti complessi, nel modo più semplice possibile, ma senza mistificazioni. E anche nella scuola sussiste, a mio avviso, il problema evidenziato da Russo sui rischi della infarinatura scientifica.

Mi riferisco qui all'ansia (che già si è criticata da altri punti di vista) di inserire sempre più fatti, sempre più argomenti nei programmi scolastici, nella convinzione implicita che "di più" sia comunque "bene"; dopotutto, sembra che si pensi, se anche non tutti comprenderanno appieno certi concetti, resterà loro un'infarinatura che "male non fa". Mentre il punto è proprio quale male può fare. Non sempre, naturalmente, ma almeno due fatti sono indubitabili, e da soli sono sufficienti per mettere in discussione la convinzione di cui sopra: 1) i programmi "sulla carta" non corrispondono minimamente a quello che si può dare per acquisito: fa impressione raffrontare i programmi della scuola media (SCUOLA MEDIA, non scuola superiore!) con quello che si può effettivamente dare per acquisito dalla maggioranza degli studenti che arrivano come matricole a un corso di laurea della facoltà di scienze; 2) esistono almeno alcune cose per le quali non sapere assolutamente nulla è meglio che averne un'infarinatura distorta.

Ritornando al discorso sul buon senso, un altro elemento sempre più pervasivo che sembra essere (e in prima battuta effettivamente è) qualcosa che va in direzione di uccidere il buon senso è il sempre più necessario ricorso alla delega. La tecnologia ha fatto sì che siano sempre di più gli aspetti della vita quotidiana che la persona "media" non controlla, pur usandoli tutti i giorni (il contrario di Robinson Crusò, insomma): e, se non li controlla, deve



delegare ad altri qualunque problema rispetto ad essi, abdicando al tentativo di una propria soluzione, sulla base di un rapporto fideistico rispetto a colui al quale delega.

Non c'è nulla in sé di sbagliato nella delega che, anzi, è cosa preziosa, ed è alla base di qualunque società civile; colpisce però negativamente questo dilagare dell'abdicazione al proprio buon senso in favore di una delega ad altri, da un lato perché spesso si finisce per delegare anche su cose che chiunque potrebbe benissimo tenere sotto controllo (il conto della spesa, le percentuali dei votanti, il passaggio dalla lira all'euro...), dall'altro perché troppo spesso la delega avviene su base totalmente fideistica, in nome di un principio di autorità, e non perché si sia razionalmente e consapevolmente scelto a chi si vuole delegare che cosa.

C'è un bel libro di Martin Gardner, degli anni '50, ma tradotto in italiano solo recentemente ([6]), dove l'autore fa un'ampia e divertente (anche se per molti aspetti tragica) raccolta di "bufale" scientifiche di vario tipo (da quelli che sostengono che la terra è piatta, a quelli che dicono che è tonda, ma è una sfera cava al cui interno noi viviamo,...); possiamo sorridere, o anche rotolarci dalle risa, ma gli episodi fanno meno ridere quando Gardner poi ci racconta che non si tratta di "perle" di studenti, bensì di "predicatori", che hanno poi avuto un seguito, e a volte anche esteso. Quasi sempre si tratta di figure carismatiche, che accusano il mondo accademico di presunzione e incompetenza nel non voler accettare le loro teorie innovative, e questo non ci stupisce; quello però che è più triste, e più pericoloso, è che spesso queste figure sono state circondate da persone, a volte anche in gran numero, che hanno abdicato alle loro facoltà razionanti per seguire la teoria del "santone". E infatti Gardner conclude con un accorato appello alla scuola e alla educazione scientifica: "Lo spettacolare successo ottenuto dalla pseudoscienza negli ultimi anni ha avuto anche il ruolo di pubblicizzare alcuni aspetti della nostra cultura estremamente bisognosi di miglioramenti. Abbiamo bisogno di una migliore formazione scientifica nelle scuole. Abbiamo bisogno di più e più bravi divulgatori scientifici. Abbiamo bisogno di migliori canali di comunicazione tra scienziati e pubblico. ...".

Sono passati 50 anni da quando Gardner ha scritto queste frasi, e il problema è a mio avviso più drammatico di prima: non solo perché continuano a esistere, e a far presa sul pubblico, "santoni" di vario tipo, ma anche perché la nuova tecnologia rende ora più facile a chiunque aprire per esempio un sito e inserirci la "dimostrazione scientifica" delle peggiori sciocchezze, mentre ai tempi delle bufale raccolte da Gardner chi sosteneva che la terra era una sfera cava doveva quanto meno convincere un "mecenate" che gli desse i fondi necessari per pubblicare le sue tesi, o per aprire una sua "università".

Questo significa che uno dei compiti vitali della scuola dovrebbe essere quello di educare a saper scegliere fra le informazioni, saper scartare le informazioni inaffidabili, saper individuare parametri sensati in base ai quali selezionare quelle affidabili.

Certo però, se vogliamo puntare tante delle nostre carte sul recupero del buon senso e sul riallacciarsi alle conoscenze pregresse di chi apprende, occorre anche “censurare” quegli esercizi che parlano dei poteri sferici con al centro una colonna di granito, o delle pentole a forma di prisma, la cui base è un triangolo equilatero di lato un metro ... (sic!).

Vorrei anche tornare un momento ai test da cui sono partita, per esprimere una forte preoccupazione al riguardo. I quiz, i test attitudinali, i “quesiti a risposta multipla” dilagano ovunque. Non si può ovviamente fare di ogni erba un fascio, ci sono certamente quiz fatti bene e quiz fatti male, ed esiste a questo punto anche un’ampia e qualificata letteratura su cosa vuol dire un quiz fatto bene. E del resto siamo stati tutti, in un certo senso, “costretti” ad usare i quiz davanti a situazioni che coinvolgevano numeri enormi di persone e nell’impossibilità quindi di risolvere il problema (di un esame, di un’ammissione, di un concorso) in modo diverso. Non voglio entrare nel merito se i quiz siano o no la maniera più opportuna per risolvere in modo equo il problema di un concorso. A me restano molti dubbi, ma voglio pure partire dall’ipotesi che un quiz fatto bene sia una buona soluzione. Il punto su cui vorrei però che comunque si riflettesse di più riguarda le conseguenze che il dilagare di questa metodologia rischia di portare nel processo di apprendimento.

Una cosa che ho spesso notato in questi anni emergere da discussioni casuali con colleghi in diversi contesti, e a cui forse andrebbe prestata più attenzione, è come la reazione degli studenti al materiale proposto ad esempio in un corso universitario, e il loro modo di porsi rispetto a questo materiale, dipenda spesso più da come sono impostati gli esami (o da come gli studenti pensano che questi siano impostati; e non è detto che sia la stessa cosa!) che non da come è impostato il corso e da ciò che viene detto a lezione.

Di fronte a questo dato di fatto, la “quizzologia” pone dei problemi: che lo si voglia o no, si induce comunque chi apprende ad apprendere in un certo modo, che fa a pugni con tutto quanto si diceva sopra, e va proprio nella direzione dell’uccisione del buon senso e dell’imparare le cose oggi per dimenticarle domani; si premiano la velocità e la prontezza di riflessi, che sono certo doti rilevanti, ma non è affatto detto che vadano di pari passo con l’acquisizione dei concetti matematici; e si spinge viceversa a trascurare quegli aspetti di approfondimento, di collegamento ecc., che sono poi invece i più importanti al fine di far diventare ciò che si studia un “mattone che resta” e che potrà poi essere usato anche a distanza di anni.

Fra le cose che sia Schoenfeld in [1] sia Artigue in [2] mettono in evidenza, c'è il problema del ruolo rilevante delle scelte strategiche che uno studente si trova a dover fare di fronte a un compito (in che ordine procedere, fino a che punto insistere su una domanda a cui immediatamente non si sa rispondere, e così via) o più in generale di quanto la conoscenza di certe “norme” del patto educativo possa condizionare il successo scolastico di un ragazzo (senza che questo necessariamente implichi un maggiore o minore livello di reale apprendimento). Schoenfeld in particolare sostiene, giustamente, che non si tratta di abilità innate, ma che vanno insegnate, e che il loro apprendimento può aumentare notevolmente le capacità dei ragazzi nel cosiddetto “problem solving”. Credo che questa affermazione metta in luce un aspetto, che può essere un prezioso elemento di riflessione in un contesto di apprendimento partecipe e attivo, ma che sarebbe assai rischioso inserire in un contesto di “quiz”: si possono certo insegnare agli studenti delle tecniche per essere più abili nella risoluzione dei quiz, ma è davvero questo che vogliamo per insegnare la matematica? O, viceversa, non possono addirittura essere controproducenti? Sto pensando, ad esempio, a quante volte la reale acquisizione di un concetto passa attraverso un accanimento testardo su “qualcosa che non torna”, che è palesemente un atteggiamento da NON tenersi nell'ambito di una prova in termini di quiz.

L'apprendimento di lungo periodo, quello che poi “resta”, è a mio avviso il nodo che più dovrebbe essere rivalutato, ed è anche qualcosa che è ben più difficile “misurare”. Non solo; finiamo addirittura ad essere noi i primi a ignorarlo quando, nel concreto di un esame, spesso avalliamo tutto sommato, magari con qualche protesta, le recriminazioni di studenti che dicono che la tal cosa “non è in programma” e quindi non è oggetto di valutazione, perché è programma dell'anno precedente, o magari di dieci anni precedenti, o meglio è qualcosa che dovrebbe far parte di quel nucleo acquisito su cui va a fondarsi la conoscenza successiva: con il risultato che si costruisce sul nulla, e così sì che si corrono seri pericoli di proporre solo quella infarinatura scientifica controproducente di cui parla Russo.

Un esempio per tutti: quanti fra gli studenti che arrivano come matricole ai corsi di laurea delle facoltà scientifiche hanno chiaro il teorema di Talete (intendo l'enunciato, non certo la dimostrazione)? E come possiamo pretendere che acquisiscano (come bagaglio culturale, e come strumento d'uso) i concetti dell'algebra lineare, se non hanno idea del teorema di Talete? Al massimo impareranno qualche “macchinetta”, buona per risolvere i temi d'esame, e dai più dimenticata il giorno dopo.

E, forse, proprio il discorso dell'apprendimento di lungo periodo – e soprattutto della difficoltà di misurarlo – potrebbe indurre anche ad una maggiore cautela nelle lamentele di

cui si parlava all'inizio di questo paragrafo, rispetto agli studenti che provengono da un segmento scolastico inferiore. Di fronte all'esito negativo di un test di ingresso, siamo proprio sicuri di aver "misurato" le capacità acquisite di porsi di fronte a un problema, o non piuttosto le nozioni che poteva far comodo a noi che gli studenti già avessero all'inizio del nuovo ciclo di studi? E di fronte a un risultato brillante di qualche mese dopo siamo proprio sicuri di essere stati noi con il nostro insegnamento ad aver fatto compiere agli studenti un salto di qualità, o che non sia piuttosto il risultato di qualche "mattoncino" di lungo periodo, posto dal vituperato insegnamento del segmento scolastico precedente, che a distanza di anni sta dando i suoi frutti?

### **Il ruolo del rigore**

Diceva Modesto Dedò in [7], riprendendo un'affermazione <sup>(4)</sup> di Bourbaki, che "è impossibile insegnare la matematica a chi non sa la matematica"; si tratta evidentemente di un'affermazione paradossale, il cui preciso scopo è però quello di mettere in rilievo il fatto che non ha senso insegnare l'aspetto formalizzato della matematica a chi già non abbia un'idea, intuitiva, informale, descrittiva, dei fatti matematici che si vogliono formalizzare. Sono convinta che questo sia un punto fondamentale, e a tutti i livelli dell'insegnamento; in primo luogo a livello della scuola dell'obbligo, che istituzionalmente dovrebbe fornire gli elementi della matematica "descrittiva", ma non soltanto. Non penso che la distinzione tra la matematica della scuola dell'obbligo e la matematica della scuola superiore debba corrispondere alla distinzione tra matematica informale e matematica formalizzata, sia perché un avvio a certi aspetti di formalizzazione, su alcune particolari questioni, può e deve essere presente già nella scuola dell'obbligo, sia perché il problema di non introdurre una formalizzazione prima che siano chiari i fatti soggiacenti è un problema che si ripresenta ogni volta che si affronta un concetto nuovo, anche alla scuola superiore, anche all'università.

Artigue sottolinea nel suo articolo [2] come l'apprendimento non sia qualcosa di continuo, ma piuttosto qualcosa che avviene per tappe, con successive rotture e ricostruzioni di schemi concettuali; ciascuna di queste ricostruzioni comporta una diversa formalizzazione, che a mio avviso non può essere introdotta se non è prima stato assimilato sufficiente materiale esemplificativo che giustifichi l'opportunità di tale introduzione.

---

<sup>(4)</sup> quando dichiara, all'inizio della sua monumentale opera, che non intende insegnare la matematica a chi già non sa "leggere, scrivere e far di conto".

E deve essere chiaro che sottolineare l'aspetto "descrittivo", o "esemplificativo" non significa affatto trascurare l'aspetto del rigore; anzi, proprio perché questo è un aspetto fondante della matematica, e non va taciuto né edulcorato, è fondamentale che vada curata la maniera per introdurlo in modo che se ne colgano tutta la ricchezza e la potenza. E va anche detto chiaramente che, viceversa, introdurre questo aspetto in tempi e modi inopportuni non è solo inutile, perché "entra da un orecchio e esce dall'altro" (e sarebbe mal di poco), ma è anche dannoso: lo studente a cui sono arrivate tra capo e collo le equazioni, che doveva comunque imparare a risolvere anche se non aveva ben capito cosa significasse "in soldoni" risolvere un'equazione, è poi anche quello che arrivato all'università usa la formula risolutiva per trovare le radici dell'equazione  $(x-2)^2=4$  o, peggio, sostiene di non saper risolvere l'equazione  $y^2-3y+2=0$  perché "le equazioni di secondo grado le abbiamo fatte, ma le abbiamo fatte solo con la x" (sic!). E se quest'ultimo può essere un caso isolato, e come tale poco significativo, chiunque abbia insegnato al primo anno di una facoltà scientifica sa come sia viceversa normale la difficoltà da parte di molti studenti nell'acquisire scioltezza sul fatto che siano uguali i due insiemi  $A=\{p \in \mathbf{Z}: p \text{ è primo}\}$  e  $B=\{n \in \mathbf{Z}: n \text{ è primo}\}$ . Il che, in fin dei conti, è indizio dello stesso problema di prima, cioè del non aver acquisito un concetto così fondamentale come l'uso delle lettere.

Il rigore "fuori posto", introdotto nel momento in cui ancora non si è capito che COSA si sta cercando di trattare rigorosamente, qual è la natura del problema in discussione, porta a tutti i fraintendimenti di cui si diceva sopra: se non si capisce e non si controlla che cosa si sta facendo, non resta altra strada che passivamente imparare certi meccanismi o certi "trucchi" che per qualche oscuro motivo portano a prendere 6 al compito, o 18 all'esame. E va anche detto che gli studenti hanno alle volte un'enorme abilità nell'adattarsi alla situazione e nel cogliere questi meccanismi: il che è certo un bene per la loro sopravvivenza di breve periodo, ma non è molto utile per quel che riguarda l'apprendimento di lungo periodo.

Per non parlare poi del finto rigore, o del rigore sbagliato, che spesso purtroppo è usato, in forma magari opprimente e autoritaria, da chi non ha capito cosa significhi rigore e ritiene magari che il rigore sia la facciata, sia una pennellata di "matematiche" con tanti bei numeri, tanti simboli e tante formule. Per fare un paio di esempi, se si deve calcolare l'area di una pizza circolare il cui raggio è di circa 15 cm, e se lo scopo è capire se si tratta di una razione più o meno abbondante rispetto a un trancio di pizza quadrato di lato circa 20 cm, sarebbe insensato usare per  $\pi$  il valore 3,14, quando 3 è più che sufficiente alle richieste del

problema; ancora più insensato sarebbe usare per  $\pi$  il valore 3,141592, e sostenere magari addirittura che “così ho un risultato più preciso, perché ho fatto il calcolo più rigorosamente”.

Un altro esempio, ancora più grave dal punto di vista logico, viene da un testo di scuola media <sup>(5)</sup>, dove l'autore vuole dare una definizione di similitudine, e la vuole pomposamente dare “con rigore” (“Definizione: dicesi similitudine ...”), anziché cominciare a chiarire più o meno di che si tratta: solo che la definizione asserisce che “una similitudine è quella trasformazione che manda l'uno nell'altro due triangoli simili”, mentre prima si è detto che “diconsi simili due triangoli per cui c'è una similitudine che manda l'uno nell'altro”.

E va aggiunto che, naturalmente, l'effetto del rigore fuori posto o addirittura sbagliato è particolarmente pericoloso su persone che non hanno le idee sufficientemente chiare sulle basi della matematica elementare, come spesso accade fra gli insegnanti della scuola dell'obbligo, che non hanno una formazione matematica adeguata. L'effetto che ne viene è quello di una spropositata paura del rigore, e quindi di un'alternanza di mostruose complicazioni di cose semplicissime con una totale ingenuità di fronte a quelli che sono invece davvero i punti delicati.

Ma che cos'è viceversa il rigore “sano”, e opportuno? Voglio qui rifarmi a una citazione di Peano in [9], riportata e ampiamente discussa in [10], dove fra l'altro si mette l'accento anche proprio su questa “paura del rigore”: “... chi non conosce bene i fondamenti d'una parte qualunque della matematica, rimane sempre titubante, e con una esagerata paura del rigore ... Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili: la scienza, o la verità, è infinita: Noi non ne conosciamo che una parte finita, e infinitesima rispetto al tutto. E della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che è maggiormente utile agli alunni ... Parimenti, ogni dimostrazione esprime una verità di un altro ordine ... Se la dimostrazione è complicata, noi possiamo tacere questa verità”.

E per restare sulla paura del rigore, voglio citare un episodio che mi sembra particolarmente significativo di questo fenomeno; l'episodio riguarda un'allieva della scuola

---

<sup>(5)</sup> E qui ci sarebbe da fare un lungo discorso sui libri di testo. Villani ha fatto qualche anno fa un pregevole lavoro di analisi di errori presenti nei libri di testo delle scuole superiori ([8]). Nei libri di scuola media, scritti spesso da persone che non sono laureate in matematica, la situazione è ancora più grave di quella evidenziata da Villani nella citata serie di articoli: dalle “immagini di punti fortemente ingranditi”, ai punti che “sono allineati se hanno la stessa direzione”, ai rettangoli “che sono uguali, ma hanno area diversa” (perché misurata rispetto a diverse unità di misura!). È chiaro che si tratta di un problema estremamente delicato, perché va a scontrarsi con forti interessi editoriali, tuttavia mi pare che l'UMI dovrebbe trovare il modo di rivendicare un diritto di “censura” sui testi scolastici: è molto triste dover continuare a leggere delle frasi come quelle che ho citato senza poter intervenire, limitandosi a sperare nel fatto che “tanto i ragazzi di quell'età non leggono i libri”.

di specializzazione per la classe 59A (scuola media), laureata in biologia, con già qualche esperienza di insegnamento, brava, interessata, desiderosa di apprendere e di affinare i propri strumenti culturali. La richiesta che avevo fatto nell'ambito di un corso della scuola era di giustificare per iscritto il fatto che, se l'area di qualcosa era il doppio dell'area di qualcos'altro (su un esempio concreto che non ricordo), anche su una piantina in scala le due aree corrispondenti sarebbero state una doppia dell'altra. Questa persona porta uno scritto corretto, solo che ... le occorre due intere pagine di foglio protocollo, e moltissimi conti, e molti ragionamenti contorti, per arrivare a una giustificazione. E a un'altra domanda che richiedeva di mettere in ordine crescente un certo numero di frazioni (avrebbero potuto essere, ad esempio,  $7/8$ ,  $2/3$ ,  $15/13$ ,  $-3/17$ ,  $1/5$ ,  $26/9$ ,  $-13/15$ ) la stessa persona risponde sempre correttamente, ma ... riducendo tutte le frazioni al minimo comun denominatore! L'episodio non finisce qui: a un colloquio successivo, dove esprimo il mio sgomento all'idea che lei potesse presentare le cose in questo modo ai suoi allievi di scuola media, la reazione è stata "Ma io naturalmente avevo visto che si poteva fare in altro modo, e a loro certamente non lo avrei fatto così!". Ho chiesto allora cosa avevo fatto di male perché mi trattasse peggio dei suoi allievi, e la risposta è stata: "ma qui pensavo di doverlo fare rigorosamente". Credo che questo sia un esempio significativo delle storture, circa l'uso e il senso stesso di cosa vuol dire "rigore", che possono essere causate dalla insicurezza sul piano dei contenuti, anche da parte di persone brave e intelligenti, che però per loro formazione questa sicurezza non hanno.

Allargando un po' il discorso, vorrei richiamare un bell'intervento di Procesi su *Matematica e cultura 2000* dal titolo *'Ricerca e insegnamento della matematica: conflitto o sintesi?'* ([11]); Procesi, dopo un'articolata analisi dei conflitti posti tra un livello sempre superiore di astrazione nella ricerca e l'esigenza di "trasformare la ricerca in informazione utilizzabile", propone una grande sfida: quella di evitare il rischio di "una spaccatura il cui risultato potrebbe essere la creazione di una specie di sottomatematica, una specie di rozza lingua franca da parlare in modo sgrammaticato ma funzionale", spaccatura che – e mi sembra qui difficile non essere d'accordo con Procesi – "rappresenterebbe una grande sconfitta intellettuale". Le vie che Procesi suggerisce al fine di provare a vincere questa sfida sono da un lato quella di "riorientarsi verso i contenuti e i problemi, piuttosto che verso gli strumenti", e dall'altro quella di "creare una forte dinamica nell'insegnamento e una vasta possibilità di scelte individuali".

Il contesto in cui Procesi situa la sua analisi è quello della didattica universitaria, ma alcuni principi mi sembra che possano essere molto simili anche nel contesto dell'insegnamento preuniversitario. Ad esempio, la critica che egli fa a un'introduzione

troppo precoce ai fondamenti della matematica, perché “i fondamenti, se non sono trattati al momento giusto e con la giusta delicatezza, non fondano nulla”, o all’introduzione delle strutture algebriche in quanto tali, perché “se poi non vengono usate lasciano il tempo che trovano” mi sembra che abbia molti punti di contatto con l’analisi che abbiamo fatto qui a livello preuniversitario.

In conclusione, penso che il rigore sia una (lenta) acquisizione che avviene per tappe di approssimazioni successive, e per tappe che non si possono forzare. Non si passa con una cesura brusca dalla matematica informale a una matematica formalizzata; ma piuttosto occorre individuare, in ciascun contesto, qual è il grado di rigore opportuno per QUEL contesto.

E, se questo vuol dire che anche a livello di scuola superiore, o a livello universitario, può essere opportuno non limitarsi esclusivamente a un piano formalizzato (dopotutto, l’astrazione si domina davvero non quando si resta sul piano astratto, ma solo quando si è in grado di passare dal concreto all’astratto e viceversa, quando si è in grado di esemplificare l’astratto e di costruire un modello a partire da un esempio concreto), vuol dire però anche che il piano descrittivo e informale – a qualunque livello si situi – non deve rinunciare a certi aspetti di rigore. Parlare di matematica a livello descrittivo non deve significare porsi sullo stesso piano della matematica formalizzata, con la sola differenza che ci si sente autorizzati a farla un po’ maluccio e a rinunciare al rigore; cioè a parlare in modo sgrammaticato, come dice Procesi.

Ad esempio, il fatto di non usare un linguaggio “matematico” non autorizza a proporre dei circoli viziosi logici, ovvero a confondere la condizione necessaria con la condizione sufficiente; e neppure a parlare di piani che hanno la faccia di sopra e la faccia di sotto, neanche se si sta parlando ai bambini o comunque in un contesto dove non avrebbe certo senso precisare la differenza tra il piano e il piano immerso nello spazio tridimensionale. E neppure si può parlare del contare come di una misura della grandezza fisica “numerosità” (confondendo il continuo col discreto), neanche se (o forse a maggior ragione quando) siamo in un contesto in cui non è opportuna una introduzione rigorosa dei numeri reali; in generale non si è autorizzati a dire cose false, e nemmeno a dire con le immagini delle cose false<sup>(6)</sup>.

---

<sup>(6)</sup> E mi dispiace dover constatare che le ellissi con le punte, purtroppo ampiamente diffuse ovunque, e dure a morire anche ora che i vari software a disposizione permetterebbero, con scarsa fatica, dei disegni corretti, sono apparse anche sulle pagine di questa rivista (BUMI sez.A, aprile 1999, pag.51)!



Anzi, di più, quando non si parla in “matematiche” dovrebbe esserci un ulteriore controllo, ben più delicato, su quanto si dice: non è sufficiente, infatti, che ciò che si dice sia corretto, ma occorre anche evitare che sia recepito in modo scorretto (o perlomeno occorre minimizzarne il rischio). Non basta quindi (come spesso è sufficiente quando si è in un contesto più formalizzato) che quello che si scrive o che si dice sia matematicamente ineccepibile, ma occorre anche porsi dal punto di vista dell’interlocutore e provare a immaginare come una certa frase possa essere recepita con gli elementi di cui l’interlocutore stesso dispone.

### **Apprendimento attivo, e insegnamento attivo**

Quello che io vedo come conseguenza logica di tutte le considerazioni e gli esempi discussi finora è che la scuola, e quindi anche la ricerca sulla didattica (che trova nella scuola il suo fondamentale punto di riferimento) ha in questo momento fortemente bisogno che si torni a spostare l’accento sui contenuti.

Questa convinzione viene dalla analisi che precede, che ho cercato di argomentare e di arricchire di esempi, ma viene anche dalla convinzione, maturata nella esperienza diretta di questi ultimi anni, che è proprio questo che la scuola e gli insegnanti ci stanno chiedendo in questo momento.

Negli ultimi anni si è un po’ troppo spostato l’accento sugli strumenti, e non solo nel senso (che già si diceva) della matematica come “strumento”, ma anche proprio sugli “strumenti” dell’insegnamento, dai sussidi didattici alle schede di valutazione, dagli ipertesti a internet: tutte cose certo importantissime e preziose, con grandi potenzialità di arricchire la trasmissione del sapere, ma tutti “strumenti”; e in quanto tali poco utili se perdiamo di vista gli obiettivi. È fin troppo banale ricordare che se un insegnante non si sente sicuro di ciò che insegna, o non ama quello che insegna, continuerà a non essere sicuro (e a trasmettere insicurezza) e a non divertirsi (e a trasmettere indifferenza o repulsione), anche se usa i più sofisticati sussidi didattici che la tecnologia gli offre.

Indipendentemente da quali siano gli strumenti di cui si dispone, e che si vogliono e possono usare, l’insegnamento continua a reggersi – a mio parere – sul dialogo fra due persone: e quindi quello che resta un punto centrale e insostituibile è il ruolo dell’insegnante, della sua preparazione, della sua cultura, della sua capacità di comunicare, della sua disponibilità a mettersi in gioco. Come resta un punto centrale quello di aumentare la “voglia” che ha l’insegnante di insegnare: vale la pena a questo proposito ricordare che il primo

“comandamento” del “decalogo” di Polya per l’insegnante è proprio “abbi interesse per la tua materia”([12]). E va aggiunto che, per banale che possa apparire, non è affatto facile per un insegnante tenere fede a questo “comandamento” nel dilagare di impegni e coinvolgimenti su mille fronti che la scuola di oggi necessariamente richiede.

Un altro piano (oltre a quello sugli “strumenti”) su cui negli ultimi anni si è forse spostato un po’ troppo l’accento – a scapito dei contenuti – è il piano delle cosiddette “scienze dell’educazione”; non c’è alcun dubbio sul fatto che l’insegnante nella scuola di oggi abbia bisogno, e in misura molto maggiore dell’insegnante nella scuola di 50 anni fa, di conoscenze che vanno al di là della materia che insegna, e in particolare di fondamenti di psicologia e pedagogia. Non penso però che questo debba voler dire abdicare al piano dei contenuti, o peggio infiocchettarlo con qualche nozione pedagogica: piuttosto, dovremmo cercare nelle sedi opportune (che oggi potrebbero essere in modo naturale le Scuole di Specializzazione all’insegnamento e le Facoltà di Scienze della Formazione) un rapporto proficuo con gli studiosi di Scienze dell’Educazione, in modo che ognuno porti le competenze che gli sono proprie nel processo di formazione degli insegnanti, senza indebite deleghe dall’una e dall’altra parte.

Riprendendo l’articolo di Schoenfeld, e la sua distinzione, fra gli scopi della ricerca didattica, di uno scopo più “teorico”, relativo all’analisi dei processi del pensiero, e di un altro più “applicato”, relativo al miglioramento della qualità dell’insegnamento, va osservato che Schoenfeld stesso è estremamente cauto sulla “automaticità” di un travaso al piano “applicato” dei risultati raggiunti sul piano “teorico”: alcuni degli esempi che fa (come quello degli studi sul massimo numero di “bit” di informazione che ciascuno di noi può tenere contemporaneamente nella memoria in uso) sono a mio avviso affascinanti, ma ciò non significa, come egli stesso sottolinea, che debbano essere considerati di immediata e automatica utilità nell’insegnamento. Forse lo potranno essere in prospettiva, ma quello che vorrei aggiungere è anche che questo non è e non sarà l’unico piano “teorico” che può concorrere (sempre con molti livelli di mediazione) al piano “applicato” (per restare sulla terminologia di Schoenfeld). È necessario anche un piano più prettamente matematico, che riguarda i contenuti dell’insegnamento, ed è su questo che io voglio insistere.

Anche nel finale dell’articolo di Artigue trovo una frase che va secondo me meditata; e precisamente quando l’autrice sostiene che, mentre vorremmo che la ricerca (didattica) ci mettesse a disposizione “mezzi facili e piuttosto economici per migliorare le nostre strategie di insegnamento”, la realtà dei fatti è che “solo raramente la ricerca ci dà prove che, attraverso adattamenti minimi ed economici, possiamo ottenere sostanziali miglioramenti. Al contrario,

la maggior parte dei progetti di ricerca, che sono stati dimostrati efficaci, richiede più impegno ed esperienza da parte degli insegnanti e significativi cambiamenti nelle pratiche”.

Tornando allora agli insegnanti, e ai contenuti, e cercando di esplicitare cosa possa voler dire “spostare l’accento sui contenuti”, io vedo essenzialmente due piani su cui articolare un intervento da parte nostra su questi problemi.

Il primo è uno sforzo teorico, che vada nella direzione di identificare i nuclei fondanti che pensiamo irrinunciabili nell’insegnamento preuniversitario, e che cerchi di muoversi in direzione opposta di quello che si è fatto finora, cercando quindi di sfrondare e non di aggiungere. Non con lo scopo di “diminuire” il sapere matematico che si chiede alla scuola di trasmettere ai ragazzi, ma con lo scopo di lasciare il massimo spazio alla libertà individuale dell’insegnante per quel che riguarda le possibili, diverse, aggiunte rispetto a un sapere minimale.

Gli ultimi anni hanno visto l’UMI curare l’edizione di Syllabus, diretti agli insegnanti, e perlopiù scoraggianti; è chiaro che scegliendo a caso dieci matematici, e chiedendo loro di compilare un tale Syllabus, ne usciranno delle indicazioni molto diverse. Schematizzando (naturalmente un po’ troppo ...), l’impressione che ne viene è che finora i curatori dei Syllabus li abbiano fabbricati a partire dall’unione di queste possibili diverse indicazioni, mentre forse ci sarebbe bisogno piuttosto di ragionare a partire dalla loro intersezione.

È inutile ossessionare gli insegnanti con l’idea che sia assolutamente necessario trattare trecento argomenti, quando tutti noi sappiamo che di questi trecento ce ne saranno sì e no tre o quattro che possiamo dare per effettivamente acquisiti al termine della scuola, e che (per quelli che continuano gli studi nei corsi di laurea delle Facoltà scientifiche) già la vita sarebbe più facile se i mattoni acquisiti fossero una decina, anziché solo tre o quattro (magari insieme a un po’ di idee chiare sullo spirito di cosa vuol dire fare matematica).

E anche questa non è certo un’idea nuova: nella conferenza generale al X Congresso dell’UMI ad Alghero nel ’75 ([13]), Modesto Dedò, ponendosi il problema di quale matematica insegnare, scriveva che “non è molto importante inserire nei nuovi programmi di matematica un argomento piuttosto che un altro; è invece molto importante che un certo argomento sia svolto bene. E una condizione essenziale perché sia svolto bene è che esso sia congeniale all’insegnante” E ancora: “i programmi dovrebbero dare soltanto indicazioni di carattere generale e dovrebbero essere tali da poter essere via via modificati con relativa facilità. In particolare si dovrebbero incoraggiare quegli insegnanti che volessero intercalare, allo svolgimento dei programmi, divagazioni su altri argomenti ...”

Cerchiamo quindi di trovare la maniera per lasciare agli insegnanti sufficiente tranquillità per operare dei tagli, e anche sufficiente spazio per viceversa approfondire degli argomenti sulla base della semplice motivazione che a loro piacciono di più di altri, o per cogliere e sfruttare eventuali occasioni che volta a volta si presentano, e che richiedono però del tempo (e quindi dei tagli su altri fronti) per essere sviluppate. Dopotutto tutti noi sappiamo (e direi più dalla nostra esperienza di studenti, che dalla nostra esperienza di insegnanti) che è facilissimo distinguere quando un insegnante tratta un argomento che gli piace e quando no.

Ho anche l'impressione che questo sia poi nel concreto quello che già fa una larga fetta di insegnanti, senza bisogno di una "benedizione" dall'esterno; però questo richiede una sicurezza, e un dominio sui contenuti, che non tutti possono avere, e rispetto al quale c'è da parte di molti insegnanti una effettiva richiesta verso l'Università. E sono i matematici in prima persona a dover rispondere a questa richiesta, senza "delegarlo" ad altri.

Alcuni potranno obiettare che non sia questa in realtà la richiesta all'Università da parte della maggioranza degli insegnanti, ma sia piuttosto una richiesta molto più banale, di avere "la pappa fatta" e le lezioni già pronte e scodellate. Non c'è dubbio che ci siano alcuni insegnanti che vogliono solo "la pappa fatta": ma confonderemmo la condizione necessaria con la condizione sufficiente se, dall'esempio di ALCUNI insegnanti che chiedono questo, tirassimo la conclusione che TUTTI gli insegnanti chiedono questo. E non si tratta nemmeno di fare una battaglia sui numeri per decidere le percentuali dell'una o dell'altra fetta: si tratta, piuttosto, di decidere consapevolmente a quali insegnanti vogliamo rivolgerci. Personalmente, penso che la strategia vincente per un intervento della Università sulla scuola sia quella di rivolgersi alla fetta di insegnanti più attenta e consapevole, che non solo non vuole la "pappa fatta", ma viceversa si irrita quando le viene somministrata, magari da persone che del concreto dell'esperienza scolastica non hanno alcuna idea; e che a noi chiede altro: chiede chiarezza sui fondamenti, puntualizzazioni sui contenuti, e spunti che li arricchiscano.

E vengo così al secondo dei due punti in cui dichiaravo più sopra che si articola il bisogno di riportare l'accento sui contenuti: c'è bisogno anche di idee, di spunti, di problemi; di problemi "intelligenti", cioè, riprendendo una definizione di Checcucci "ricchi di interrelazioni con idee significative"; problemi che riportino il "gusto della matematica elementare", di cui parla Prodi in [14]; problemi che generino altri problemi, e che stimolino la fantasia (di chi impara, e anche di chi insegna); che forzino la persona a pensare, a discutere, a fare dei collegamenti. Problemi e situazioni ricchi di spunti che diano la possibilità di "fare matematica" in modo attivo: fare degli esperimenti, intravedere un filo comune nei risultati di questi esperimenti, formulare delle congetture, cercare di giustificare

queste congetture, provare l'entusiasmo della "scoperta". E fare anche degli errori, perché l'errore è uno stadio e una tappa naturale nell'impadronirsi di un concetto: ma avendo un retroterra (nell'ambiente circostante) e una sicurezza di fondo (da parte dell'insegnante) che permetta di non esorcizzare e nascondere l'errore, ma di farne uno strumento di crescita collettiva, analizzandone l'origine e le cause. Insomma una sorta di "laboratorio", non necessariamente identificato come un luogo fisico, ma piuttosto come un modo di porsi di fronte al processo di apprendimento/insegnamento.

Vorrei osservare per inciso (sempre a supporto della tesi che da parte del mondo della scuola c'è un'effettiva domanda su questo terreno) che gli ultimi anni hanno visto un fiorire di diverse iniziative, dalle mostre ai giochi matematici, concepite spesso (anche se non esclusivamente) a livello universitario e dirette verso la scuola; si tratta di iniziative anche di carattere molto diverso fra loro (e un articolo [15] in via di pubblicazione su questa stessa rivista si pone l'obiettivo di dare un quadro di quello che è stato fatto finora a proposito di mostre), che però vanno tutte nella direzione di proporre alla scuola dei problemi e degli spunti; queste esperienze, nella loro diversità, hanno tutte avuto in comune l'enorme favore con cui sono state accolte dalla "utenza", spesso ben al di là delle aspettative di chi le aveva organizzate. Iniziative di questo genere possono svolgere una funzione nella direzione di quanto si diceva, e il favore che hanno incontrato lascia pochi dubbi sul fatto che da parte degli insegnanti ci sia una richiesta in questo senso. <sup>(7)</sup>

Non è certo una scoperta di oggi il fatto che l'apprendimento, per essere apprendimento reale, debba essere attivo: basta ricordare i bellissimi libri di Polya (il già citato [12], o anche [17]) e gli scritti di Freudenthal ([18]). Da parte mia voglio anche inserire come ricordo personale l'esperienza della "palazzina", a Pisa nei primi anni '70, che io ho vissuto ai miei primi anni di università. La palazzina era un luogo, voluto da Checcucci, con l'idea che potesse essere un punto di raccolta per persone diverse accomunate dal desiderio di imparare e insegnare la matematica: noi ci andavamo come studenti del corso di Geometria I, ma c'erano anche insegnanti di scuola, di diversi livelli (e una delle convinzioni sottostanti a quel tentativo era proprio il fatto che qualunque discussione o ripensamento sull'insegnamento non dovesse essere confinato nel "segmento" scolastico a cui si riferiva,

---

<sup>(7)</sup> E vale la pena ricordare anche che ci sono situazioni all'estero dove questo fenomeno è ben più massiccio che in Italia: fa impressione constatare il successo che hanno avuto in Francia alcune riviste di contenuto matematico (al punto che *Tangente* ora si vende in edicola), e le tirature dei numerosissimi libri di giochi e problemi; come è notevole il fatto che dal 1997 il quotidiano *Le Monde* ospiti una rubrica settimanale di giochi matematici, di cui è recentemente uscita una raccolta ([16]).

ma non potesse che avvantaggiarsi dalla comunicazione con altri contesti); l'idea era quella di coagulare in questo luogo una raccolta di testi, di modelli, di oggetti ricchi (di contenuti matematici) ed efficacemente utilizzabili, possibilmente a livelli diversi e da interlocutori diversi, senza nulla togliere alle potenzialità di fantasia e di "riscoperta"; e anche, insieme, che fosse un luogo dove era piacevole andare (e quindi – perché no? – anche le fragole nel giardino!).

Spostandosi, e non di poco, nel tempo e nello spazio, vale la pena segnalare l'interessante esperimento del seminario dal titolo "*Geometry and the imagination*", condotto nel 1991 da John Conway, Peter Doyle, Jane Gillman e Bill Thurston, presso il Geometry Center di Minneapolis. Si tratta di un esperimento di quindici giorni di "full immersion" nella geometria, diretto a un pubblico vario, che andava da ragazzi di liceo a studenti universitari, a insegnanti di scuola e di università. Sfogliando le note del seminario ([19]) si può incontrare di tutto: dalle bucce di patate (usate per dare un'idea della curvatura) a come fabbricare a maglia un nastro di Moebius. E le firme dei curatori (e anche quello che si legge nelle note stesse) non lasciano dubbi sul fatto che l'uso delle bucce di patate o di altro materiale del genere non sia stato certo inteso nel senso di un "ammiccamento" per edulcorare fumettisticamente alcuni concetti complicati, ma sia stato portato avanti con "rigore", con quel rigore sano di cui si parlava prima.

Volendo utilizzare strumentalmente questo esempio come un'occasione per tirare le conclusioni delle argomentazioni svolte, gli elementi che ce lo fanno apparire (pur naturalmente in un contesto assai diverso) come un esperimento convincente sono:

- La presenza di un certo numero di matematici qualificati: questo può certamente non essere sufficiente a garantire l'efficacia didattica di una data iniziativa, ma altrettanto certamente è necessario a garantirne la solidità di impianto teorico e la ricchezza sul piano dei contenuti.
- Un contesto che stimoli una partecipazione attiva e libera da eccessivi vincoli di tempo e di "programma da svolgere"; e che trovi le forme per stimolare anche l'entusiasmo necessario a una partecipazione realmente attiva.
- Un'enfaticizzazione sulla qualità del pensiero, e sul livello di successive approssimazioni nell'appropriarsi di un concetto, piuttosto che sulla quantità e sulla velocità.
- L'interazione fra categorie di persone diverse, anche come strumento per vedere uno stesso argomento da più punti di vista, e a diversi livelli di profondità.

- L'accento sui contenuti e sui problemi, piuttosto che sulle tecniche della “matematica come strumento”.

Si tratta certamente di obiettivi non banali, ma che possono costituire un punto di riferimento per il lavoro che abbiamo di fronte.

## Bibliografia

Nota Bene. Si tratta esclusivamente dei libri o degli articoli citati nel testo, e NON quindi certo di una bibliografia che voglia essere esaustiva sull'argomento.

- [1] Alan H. SCHOENFELD, *Purposes and methods of research in mathematics education*, Notices of the AMS, December 1999; traduzione italiana *Obiettivi e metodi di ricerca in didattica della matematica*, BUMI, sez. A, serie VIII, vol. III-A, agosto 2000, pagg. 175-200.
- [2] Michèle ARTIGUE, *The teaching and learning of mathematics at university level*, Notices of the AMS, June-July 2000; traduzione italiana *L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario*, BUMI sez. A, serie VIII, vol. III-A, aprile 2000, pagg. 81-103.
- [3] Bertrand RUSSELL, *Elogio dell'ozio*, TEA, 1990
- [4] Fabio DE MICHELE, Laura NUTI, Vinicio VILLANI, *Ma-Li*, Le Monnier, 1999
- [5] Lucio RUSSO, *Matematica e letteratura*, in “Matematica e cultura 2000”, a cura di Michele Emmer, Springer 2000
- [6] Martin GARDNER, *Nel nome della scienza*, TranseuroPA, 1998
- [7] Modesto DEDÒ, *Matematica descrittiva e matematica artigianale*, in “L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate”, vol. 16, n. 5/6, 1993, pagg. 469-483
- [8] Vinicio VILLANI, *Errori nei testi scolastici: algebra ...:geometria ...:analisi*, Archimede, vol.45, 1993; *...: calcolo numerico, logica, informatica ...: probabilità, statistica, matematizzazione ...: oltre i programmi ministeriali* Archimede, vol.46, 1994 (N.B. si tratta di una serie di sei articoli)
- [9] Giuseppe PEANO, *Sui fondamenti dell'analisi*, Boll. Mathesis vol.2, 1910, pagg. 31-37
- [10] Modesto DEDÒ, *Il rigore nell'insegnamento preuniversitario*, in “L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate”, vol. 16, n. 5/6, 1993, pagg. 461-468
- [11] Claudio PROCESI, *Ricerca e insegnamento della Matematica, conflitto o sintesi?*, , in “Matematica e cultura 2000”, a cura di Michele Emmer, Springer 2000

- [12] George POLYA, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, 1970
- [13] Modesto DEDÒ, *Problemi sulla didattica della matematica*, Boll.U.M.I. (4) vol.12, 1975, pagg.235-251
- [14] Giovanni PRODI, *Tendenze attuali nell'insegnamento della matematica*, Memorie di Matematica e di Scienze Fisiche e Naturali 100°, vol. VI, fasc. 17, 1982, pagg. 183-196.
- [15] Simonetta DI SIENO, *Mostre di matematica: soltanto una moda o una strategia interessante?*, in corso di pubblicazione su Boll.U.M.I., sez. A
- [16] Élisabeth BUSSER, Gilles COHEN, *100 jeux mathématiques du "Monde"*, éditions Pole, 1999
- [17] George POLYA, *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, 1967
- [18] Hans FREUDENTHAL, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La Scuola, 1994
- [19] John CONWAY, Peter DOYLE, Jane GILLMAN e Bill THURSTON, *Geometry and the imagination in Minneapolis*, <http://www.geom.umn.edu/docs/education/institute91/>.