

Meraviglie del cavolo! (ovvero della dimensione frattale del cavolfiore)

(Pervenuto il 10.9.99, approvato il 9.6.00)

ABSTRACT

The paper deals with the wonderful fractal structure of a kind of cauliflower (Brassica Oleracea Botrytis Cimosa). The fractal dimension of the vegetable is empirically detected by measurement and a simple mathematical model of the "fractal cauliflower" is then built which agrees with the experimental data.

Introduzione

Una delle fasi più importanti del procedimento che chiamiamo metodo sperimentale è senza dubbio l'osservazione.

In questa fase ci troviamo spesso in uno stato paranormale in cui l'attenzione è notevolmente amplificata e nel frattempo la mente giace estatica e meravigliata.

Ciò accadde quando nel bel mezzo di un pranzo fra parenti mi trovai di fronte un bel cavolfiore fumante.

Subito fui attratto dalle sue spirali lastricate da una sequenza di riproduzioni in scala ridotta del cavolfiore stesso, e a loro volta questi piccoli cavolfiori riproducevano la forma originale in una miriade di esemplari in scala ancor più ridotta. Stimai che questo processo di autoreplicazione proseguisse per almeno cinque generazioni. La proprietà di certi oggetti geometrici per i quali una qualsiasi parte di essi è una specie di omotetia interna, cioè una riproduzione in scala dell'elemento di partenza, si traduce nel termine inglese self-similarity [1].

"Ma questo è un frattale!" tuonai sbigottito. Subito capii dalle facce dei presenti che il mio stato, più che paranormale, appariva perlomeno 'poco normale'.

I frattali sono oggetti geometrici che presentano la proprietà d'invarianza di scala detta, appunto, self-similarity, ne sono un esempio la famosa curva di Koch e il tappeto di Sierpinsky (fig. 2).

Appena mi capitò l'occasione comprai qualche esemplare di cavolfiore da un ortolano al quale chiesi come si chiamasse quel particolare tipo di cavolfiore; il tizio mi rispose in dialetto qualcosa che tradotto in italiano suona come 'bastardone'! Seppi poi, grazie all'aiuto di un amico che lavora presso un istituto agronomico universitario, che il nome italiano di questa specie è cavolo broccolo e quello officinale (botanico) è Brassica Oleracea Botrytis Cimosa, ed è una specie diffusa praticamente in tutta Europa.

Dimensione frattale

Non è facile dare una definizione generale di dimensione frattale. La modalità di computo di questa, infatti, è abbastanza semplice per oggetti piuttosto regolari, ma può diventare invece complicata per oggetti caotici o anche pervasi dal cosiddetto caos deterministico, cioè sistemi che per opportuni valori dei propri parametri interni mostrano un comporta-

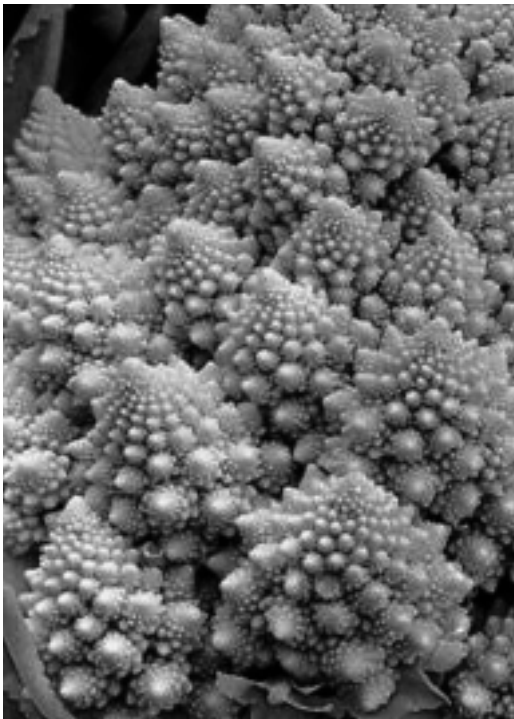


Fig. 1

mento ordinato, ma alterando anche di poco questi parametri possono esibire un comportamento caotico (del resto non tutti questi sistemi possono essere descritti utilizzando la geometria frattale).

Per una trattazione più semplice e pratica possibile utilizzeremo l'approccio divulgativo dello stesso Mandelbrot [1], che può essere considerato il principale artefice e divulgatore della geometria frattale.

Diciamo che un oggetto frattale è caratterizzato dalla proprietà di omotetia interna (self-similarity) e dall'aver una ben precisa dimensione frattale.

Se osserviamo un oggetto frattale (si veda la fig. 2) ad una certa scala, cioè con una risoluzione R_0 , potremo contare, diciamo, un certo numero N_0 di elementi che compongono l'oggetto e nello stesso tempo ne sono la riproduzione in scala.



Fig. 2

Utilizzando un microscopio potremo ingrandire l'immagine dell'oggetto fino ad una risoluzione $R_1 < R_0$ scorgendo al suo interno un numero $N_1 > N_0$ di parti che sono le riproduzioni in scala dell'oggetto iniziale ma rimpicciolite. Ingrandendo ulteriormente l'immagine si arriverà ad una risoluzione R_2 alla quale si scorderà una nuova generazione di un numero N_2 di riproduzioni in scala dell'oggetto originario.

Questo processo può essere continuato teoricamente all'infinito per un frattale matematico, terminerà invece ad una certa scala per un frattale fisico. Comunque si potrà dire che il rapporto di omotetia del frattale sarà la costante

$$r = \frac{R_1}{R_0} = \frac{R_2}{R_1} = \dots$$

In generale l'andamento del numero di riproduzioni N in funzione del rapporto di omotetia r in un frattale sarà del tipo:

$$N(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right)^d \tag{1}$$

ove d è proprio la dimensione frattale di omotetia dell'oggetto che, con qualche semplice passaggio algebrico, risulta essere:

$$d = \frac{\log\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{2}$$

La dimensione di omotetia ingloba anche quella topologica: per esempio le parti N di un segmento di lunghezza R_0 si possono determinare a partire dalla conoscenza di un'unità di misura (risoluzione) R utilizzando la relazione (1) con $d = 1$. Analogamente per determinare quanti quadretti di lato R ci sono in un quadrato di lato R_0 si dovrà utilizzare ancora la relazione (1) con, però, $d = 2$, ecc.

Un'esperienza per calcolare la dimensione frattale del cavolfiore.

1) Questioni di metodo.

Col termine cavolfiore s'intende, in quest'articolo, un generico esemplare della famiglia. Vi sono tuttavia esemplari che, anche se diversi, mostrano una certa regolarità (si vedano le figure 1 e 3) e altri per i quali tale regolarità non s'intravede, nemmeno le caratteristiche spirali.

In tutta onestà io mi sono limitato a studiare cavolfiori diversi ma sempre del primo tipo. Il metodo proposto si può tuttavia applicare, limitatamente al calcolo della dimensione frattale, in linea di principio ad un qualsiasi esemplare (potrebbe anzi essere un approfondimento della ricerca).

Le domande alle quali vogliamo ora dare una risposta sono le seguenti:

- 1) "Si può misurare, in maniera proponibile a studenti della scuola secondaria superiore, la dimensione frattale di un oggetto apparentemente complicato come il cavolfiore?"
- 2) "Qual è il senso della proposta di un argomento così complicato a studenti della secondaria?"

Cominciamo col rispondere alla domanda 1). Sì, è possibile determinare la dimensione frattale del cavolfiore con un calibro ventesimale... e un po' di pazienza!

Più sottile è la domanda 2).

Direi che, oltre al fascino estetico per questi oggetti, si possono suscitare nei ragazzi importanti osservazioni:

- a) capire una struttura come il cavolfiore ci insegna che matematica e fisica sono intimamente alleate, anche oltre la rigida regolarità dei modelli semplificati, nella descrizione della natura. In questo caso la fisica fornisce la modalità sperimentale per verificare un modello matematico. La matematica fornisce la chiave di descrizione delle forme della natura. D'altro canto, aldilà delle equazioni e dei numeri, la scienza spiega il perché la natura realizza queste forme strane comunque amministrare dalle richieste di economicità e funzionalità.
- b) Il cavolo broccolo frattale rappresenta un oggetto peculiare ma non troppo, che possiede una palese regolarità e nello stesso tempo non è perfetto come un modello matematico. Insomma ordine e caos sembrano unirsi in un balletto sulle pieghe a spirale di questo misterioso oggetto. Ma a voler ben guardare, la natura è pervasa ad ogni scala da questo connubio.
- c) Capita poche volte che di un sistema si riescano a misurare in maniera abbastanza semplice i parametri tipici e ad accordarli con un modello matematico meno semplice ma flessibile e, inoltre, che si possano coinvolgere in questa ricerca ragazzi delle superiori.

Certo, occorre che i ragazzi conoscano, come prerequisito, le proprietà delle funzioni esponenziali e dei logaritmi. Ma questi non sono forse argomenti tipici della matematica del quarto anno?

Spendere tempo per questa attività potrebbe essere un modo per far meglio digerire loro esponenziali, logaritmi e, perché no, le famigerate serie numeriche, oltre che permettere loro di capire che fra ordine e caos si estende una larga fascia di oggetti che fanno parte del nostro mondo materiale e, proprio perché appartengono ad una zona di confine, fanno intravedere un po' meglio la reale natura delle cose.

È impressionante a questo proposito come la natura possa essere talvolta abbastanza semplice e meravigliosa nello stesso tempo!

2) Questioni pratiche.

La ricetta.

Munirsi di un cavolfiore. Non andate a chiedere all'ortolano la specie botanica, lo mettereste in imbarazzo. Invece guardate nel reparto cavolfiori se trovate qualcosa di simile a ciò che è riportato nelle fotografie di questo articolo, compresa la figura 3, che rappresenta una specie d'incrocio fra il cavolo broccolo e il cavolfiore normale (che sia questo il vero "bastardone"?).

Munirsi di un calibro ventesimale.

Prima di smontare il cavolfiore misurate l'angolo di apertura del cono da esso formato (anche se non si tratta proprio di un cono, fate questa misura approssimativamente).

Visto che ci siete osservate anche le strutture a spirale tipiche di questa varietà.

Normalmente si possono facilmente individuare 13 spirali di piccola curvatura con 8 petali* ciascuna e 8 spirali di curvatura più pronunciata con 13 petali ciascuna.

Date un'occhiata anche all'elicità delle spirali. Personalmente, nonostante abbia smontato una decina di cavolfiori, non sono riuscito a mettere in evidenza una preferenza del cavolfiore per l'avvolgimento sinistrorso o destrorso.

Misurate i diametri dei petali su qualche spirale, in una sequenza di una decina di petali per ogni spirale; queste misure saranno utili per verificare che esiste un rapporto di scala costante. Lo vedremo in seguito.

Sfogliate i petali del cavolfiore, misurate il diametro massimo ed eventualmente misurate la massa, questo per ogni petalo finché le dimensioni e la massa non diventino troppo piccole (ci si può fermare ad 1 decimo di grammo) scrivendo i dati in un'apposita tabella. Questo per la prima generazione. Sfogliate ora i petali dei petali (seconda generazione), misurate come prima i diametri massimi e la massa.

Ripetere le operazioni per le successive generazioni fino ad esaurimento (nervoso?).

Ovviamente più misure si fanno migliore sarà il risultato, tuttavia è buona norma superare le duecento coppie di misure.



Fig. 3

* In tutto il testo dell'articolo si è usato impropriamente il termine "petalo" al posto del più corretto "infiorescenza". Questo allo scopo di aiutare l'intuizione del lettore. Per sciogliere ogni dubbio il termine indica un elemento del cavolfiore, somigliante all'intero ortaggio, che può essere divelto alla base del suo tronco principale come nell'atto di staccare un petalo da un fiore.

Facendo l'esperienza in una classe, cioè suddividendo i compiti fra gli alunni, l'operazione risulta molto più breve.

L'esperienza è fatta! Se volete potete ora rifo-ccellarvi mettendo in padella il cavolo smontato con aglio e olio e una spolveratina di noce moscata. Oltre ad essere bello, questo tipo di cavolfiore è anche assai gustoso.

Ora comincia l'elaborazione dei dati sperimentali, a questo proposito meglio utilizzare un foglio elettronico del tipo EXCEL.

Cominciamo con la dimensione frattale vera e propria, quindi consideriamo solo i diametri.

Copiate le misure dei diametri in una colonna e ordinateli in modo decrescente.

Ora occorre operare come quando si costruiscono gli istogrammi, cioè definire degli intervalli di lunghezze e contare quanti diametri cadono in un certo intervallo (frequenze).

Insomma bisogna arrivare a costruire una tabella come quella riportata (tab. 1).

Nella tabella l'ultima colonna a destra contiene le misure dei diametri in ordine decrescente, nella prima colonna sono riportati gli intervalli di lunghezze (partizione): il valore della cella è l'estremo superiore dell'intervallo mentre il valore della cella sottostante è l'estremo inferiore; nella seconda colonna sono riportate le frequenze relative agli intervalli.

La tabella è ovviamente stata troncata inferiormente e costituisce quindi solo un esempio. Essa è completata con le due colonne dei logaritmi dei rapporti D_0/D (cioè diametro massimo iniziale diviso per il diametro i-esimo) e N/N_0 (cioè il nu-

mero di petali con diametro maggiore o uguale al diametro i-esimo diviso per il numero iniziale di petali). In pratica nella tabella del nostro esempio si ha $D_0 = 44,0$ mm e $N_0 = 3$.

D Diam (mm) partizione	N Frequenza cumulata	Ln(D_0/D)	Ln(N_0/N)	D Diam (mm) misure
44,00	3	0,00	0,00	44
41,90	3	0,05	0,00	44
39,91	3	0,10	0,00	43
38,01	4	0,15	0,25	37,5
36,20	4	0,20	0,29	34,4
34,48	5	0,24	0,51	31
32,83	5	0,29	0,51	30,7
31,27	8	0,34	0,98	30,6
29,78	8	0,39	0,98	28,2
28,36	13	0,44	1,47	28
27,01	14	0,49	1,54	28

Tab. 1

Non rimane che costruire il diagramma riportato in figura 4.

Se la partizione dell'insieme delle misure dei diametri viene effettuata in maniera tale che

$$D = D_i = D_{i-1} \cdot \delta$$

con δ parametro da scegliere a nostro piacimento, allora è possibile adattare il grafico in figura 4 in maniera tale da evidenziare meglio un andamento lineare.

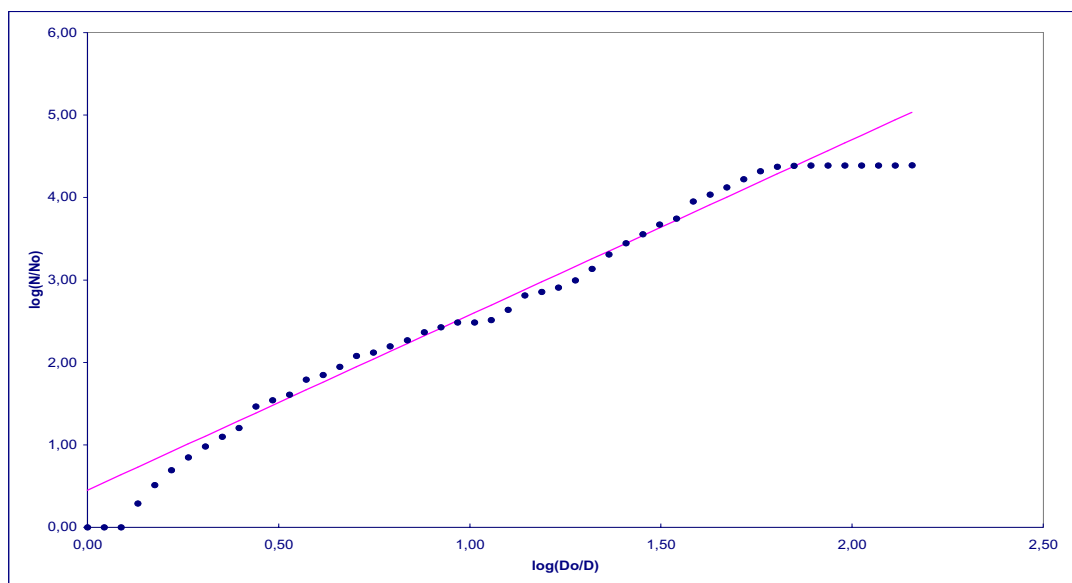


Fig. 4

A questo proposito si osservi che il grafico di figura 4 non è rappresentazione della scelta più felice di δ , infatti è evidente un taglio alle piccole scale (si osservi che gli ultimi dati hanno tutti la stessa ordinata). Scegliendo opportunamente δ si possono invece utilizzare nella distribuzione lineare anche i dati citati.

Si può facilmente dimostrare che la dimensione frattale definita dalla formula (2) è identica alla seguente formula:

$$d = \frac{\log\left(\frac{N}{N_0}\right)}{\log\left(\frac{D_0}{D}\right)} \quad (3)$$

e quindi nel nostro caso la dimensione frattale del cavolfiore non sarà altro che la pendenza della retta che meglio descrive la distribuzione.

Tale pendenza si determina, come al solito, o con il metodo empirico delle rette di minima e massima pendenza o con il ricorso al sofisticato metodo dei minimi quadrati.

Facendo il grafico per bene e prendendo la metà superiore dei dati (perché gli ultimi dati sono riferiti a campioni più popolosi di petali e quindi statisticamente più significativi) si ottiene, nel nostro caso, la seguente pendenza per la retta di regressione:

$$d = (2,28 \pm 0,06)$$

a tale misura è associata una probabilità del 99,5% (l'incertezza sulla pendenza fornita dal foglio elettronico Excel è stata moltiplicata per il coefficiente di Student relativo a questa probabilità e al numero di gradi di libertà considerati).

Questo risultato mostra che la "superficie" del cavolfiore è talmente corrugata da rappresentare in

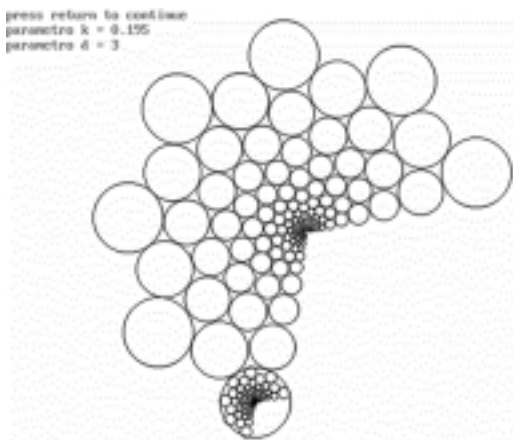


Fig. 5

realtà una via di mezzo fra una superficie e un volume.

Se uno vuole proprio esagerare può approfondire l'argomento studiando anche l'andamento della massa in funzione del rapporto di scala; allora, mediante una bilancia elettronica al centesimo di grammo e procedendo in maniera del tutto analoga a quanto fatto finora (basta semplicemente sostituire il diametro massimo con la massa), si può mettere in evidenza che anche la massa si distribuisce alle diverse scale come un frattale di dimensione $d \cong 0,9$.

Un modello matematico per il cavolfiore

Raramente nella fisica che s'insegna alle superiori si va oltre semplicissimi modelli matematici che consistono in funzioni che descrivono rette, parabole o iperboli in un piano cartesiano.

Lo sforzo qui deve essere maggiore.

Proverò a descrivere in estrema sintesi le caratteristiche del modello, i dettagli sono riportati nell'appendice di questo articolo.

Il modello assume che la forma di ogni petalo sia un cono a base circolare.

Nella figura 5 è rappresentato lo sviluppo di un cavolfiore secondo il modello proposto. Per chiarezza ho riprodotto la seconda generazione in un solo petalo (in basso).

Nella figura si nota che pur sostituendo alla sagoma di un petalo una circonferenza si riescono ad ottenere le spirali, anche se nel cavolfiore reale sono 8 e 5 e qui sono 7 e 7; in entrambi i casi, gli spicchi in cui è suddivisa la superficie del cavolfiore sono 13.

Si può pensare che i cavolfiori reali presentino innumerevoli versioni deformate di questa figura base.

Il modello fornisce la seguente formula per ricavare la dimensione frattale del cavolfiore in funzione di un parametro k che rappresenta il rapporto fra il diametro di una circonferenza e la sua distanza dal centro del cavolfiore (si veda la relazione (4) nell'appendice):

$$d(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{\rho(8n)}{\rho(8(n-1))}\right)}{4 \cdot \log\left(\frac{1+k}{1-k}\right)} \quad (11)$$

ove $\rho(n)$ è una successione, determinata induttivamente, che indica il numero di petali che si possono contare quando i loro raggi R sono maggiori o uguali di R_n secondo la seguente formula:

$$R \geq R_n = R_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (10)$$

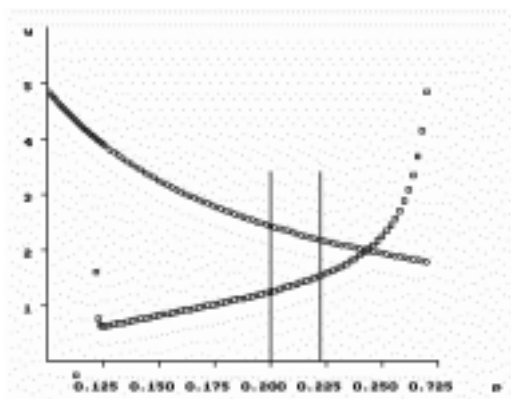


Fig. 6

Per effettuare un confronto fra la formula (11) e la definizione generale (2), da cui la (11) deriva, si tenga conto che il parametro di omotetia è definito dalla relazione

$$r = \frac{R_n}{R_{n-1}} \quad (12)$$

e che il rapporto $\rho(n)/\rho(n - 1)$ risulta stabilmente oscillante al tendere di n all'infinito e il periodo di oscillazione è 8 ($d(k)$, invece, non oscilla ma converge rapidamente e in maniera monotona!).

Il grafico della dimensione frattale in funzione di k è riportato nella figura 6 (cerchietti).

Confronto con i dati sperimentali

Per effettuare il confronto fra i valori dei parametri ricavati dall'esperienza e quelli forniti dal modello ho seguito la seguente procedura:

- a) ho determinato la dimensione frattale del cavolfiore da un grafico del tipo di quello in figura 4 mediante il metodo dei minimi quadrati, essendo la dimensione frattale dell'oggetto appunto la pendenza della distribuzione supposta lineare. A questo proposito è necessario dire che ho considerato solo la parte finale dei dati (metà circa) cioè quelli relativi ai petali più piccoli, quindi più numerosi, quindi più significativi; questa scelta si è rivelata poi in ottimo accordo con il valore della dimensione determinata con un metodo più sofisticato, detto dei momenti, cui si rimanda alla referenza [3] p. 80;
- b) precedentemente ho misurato i diametri di petali su una stessa spirale per più spirali e per più esemplari, costruendo il grafico in figura 7. Questo grafico si realizza con le coppie di coordinate $(R_0, R_1), (R_1, R_2), (R_2, R_3), \dots$, ove R_i rappresentano i diametri massimi dei petali, in sequenza, su una spirale. In questo modo si ottiene ancora una distribuzione ipoteticamente lineare e la pendenza è proprio il parametro di

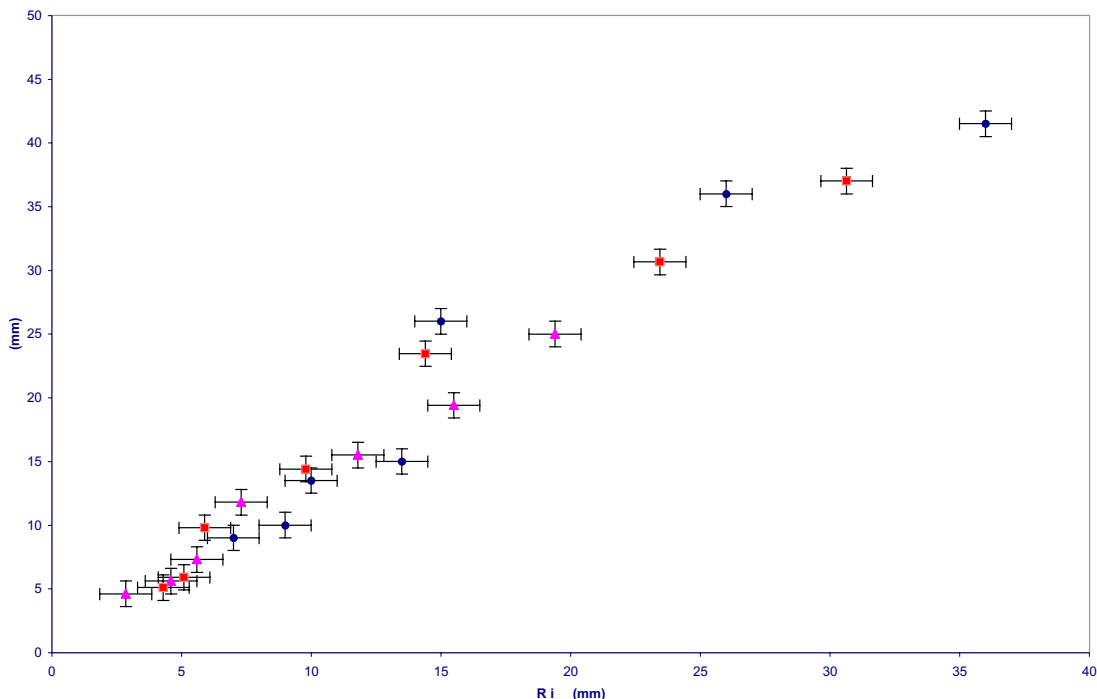


Fig. 7

omotetia dato dalla relazione (12) (si veda l'appendice), anche questo parametro è confrontabile con l'omologo fornito dal modello;

- c) infine il confronto è stato fatto partendo dai valori dei parametri, sia per il modello sia per l'esemplare studiato, relativi ad un'apertura di cono, misurata precedentemente sull'esemplare, di 100 ± 5 gradi sessagesimali.

La seguente tabella riassume i valori dei parametri misurati e forniti dal modello.

parametri	modello	esperienza
β (gradi sessagesimali)	100 ± 5	100 ± 5
rapporto Omotetia	$1,24 \pm 0,01$	$1,2 \pm 0,2$
dimensione	$2,26 \pm 0,08$	$2,26 \pm 0,06$

Tab. 2

Per tutte le incertezze delle misure indirette stimate si è utilizzata la correzione della distribuzione di Student relativa ad una probabilità del 99,5%.

Sul perché la forma del cavolfiore è quella che è

Il fatto che il cavolfiore sia un frattale di dimensione $d \cong 2,28$ implica che, se non esistessero i tagli alle piccole e alle grandi scale, così come per tutti i frattali fisici, la sua superficie sarebbe infinita e così pure il suo volume. La cosa si fa interessante quando però si analizza il rapporto fra area e volume; parte dell'andamento di questo rapporto è rappresentato nella figura 6 (quadretti).

Si osserva che per valori del parametro k (in ascissa) compresi fra 0,125 e 0,270 la curva presenta un pianerottolo, e i valori che si riferiscono al nostro cavolfiore sono compresi fra i due segmenti verticali grossomodo al centro del pianerottolo.

Devo dire che i valori calcolati si riferiscono al modello da me creato e quindi ogni valore della dimensione e del rapporto area/volume è il risultato di più di 900 iterazioni (passaggi fra coni più grandi a coni immediatamente più piccoli), cioè è un valore che si riferisce al frattale matematico.

Inoltre è noto che gli oggetti fisici hanno dimensioni frattali che non superano il valore 3 (il che ha un ovvio significato geometrico).

Ma pur considerando questo come riferimento ideale, la situazione reale non differisce più di tanto dal modello matematico creato, di conseguenza si può affermare che **il cavolfiore preferisce decisamente un basso rapporto area/volume.**

Quale può essere il significato di tutto ciò?

In primo luogo l'esigenza di avere una vasta superficie può essere finalizzata alla maggiore produzione di semi, cioè, essendo la parte bianca del cavolfiore un vero e proprio fiore, ad esigenze riproduttive.

Tuttavia il cavolfiore è un ortaggio che cresce e si sviluppa anche in periodi freddi, in cui sono possibili gelate.

Questo ha reso necessario un basso rapporto area/volume in quanto:

- a) maggiore è la superficie e maggiore è la quantità di calore disperso;
b) ma anche se la superficie è grande, se un organismo vitale possiede un grande volume è anche più capace di immagazzinare calore.

Insomma un basso rapporto area/volume permette al cavolfiore di soddisfare alle sue esigenze riproduttive e nello stesso tempo non disperdere troppo calore evitando il rischio di morire per congelamento.

Infatti è noto che la creazione di cristalli di ghiaccio negli organismi viventi porta alla loro repentina morte.

Per dovere di cronaca: l'area ed il volume del cavolfiore in funzione di k così come il loro rapporto sono stati ottenuti con un calcolatore mediante un programma in C e utilizzando le formule del modello proposto.

Osservazioni conclusive

Mi rendo conto che presentare l'argomento qui trattato a ragazzi delle superiori non è cosa facile. D'altro canto, lo ripeto, mi è sembrato necessario dire più di quel che andrebbe loro detto.

Ritengo che arrivare a comprendere in maniera interdisciplinare la struttura del cavolfiore possa invece essere oltre che interessante, molto formativo.

Nella scuola in cui attualmente insegno (un triennio IPSIA) questa esperienza è difficilmente proponibile, tuttavia, presentandola in termini qualitativi, ho osservato un reale interesse per l'argomento ed i ragazzi, dopo qualche iniziale sorriso, sono rimasti in genere affascinati dalle bizzarre forme del cavolfiore.

Il senso di questo articolo è di suggerire una tecnica di misura della dimensione frattale di un cavolfiore, e non quello di stabilire l'intervallo di variabilità delle dimensioni frattali di tutte le sottospecie di cavolfiori. Questo potrebbe essere oggetto di un lavoro futuro.

Un'ultima osservazione sulle dimensioni frattali nel modello.

Dal grafico in figura 6 sembrerebbe possibile, geometricamente, una dimensione frattale maggiore di 2 per una figura bidimensionale! Questo non ha ovviamente senso, ed è dovuto al fatto che per i valori dei parametri che danno una dimensione superiore a 2 vi sono nella figura frattale un'infinità di punti doppi ([1] p. 31).

Ciò non toglie che se immergiamo il frattale nello spazio a 3 dimensioni allora una dimensione frattale superiore a 2 (ma inferiore o uguale a 3) ha

senso geometrico e i punti doppi hanno il senso fisico di zone in cui petali sono parzialmente coperti da altri petali.

Ringrazio mia moglie per il suo apporto alla discussione del perché il cavolfiore è fatto così come è fatto: quando stavo per comunicarle i risultati della mia ricerca ella, nella sua disarmante semplicità, mi portò giù nel suo orto (mia moglie ha quel che si dice il “pollice verde”) e mi fece a suo modo una rapida carrellata delle osservazioni che ho riportato in queste conclusioni e finì la sua breve dissertazione dicendomi: “...era proprio necessario spendere tutto questo tempo per arrivare a delle conclusioni così semplici?”

Appendice: il modello matematico del cavolfiore visto da vicino

Assumiamo che ogni petalo e “sottopetalo” del nostro cavolfiore sia descritto da un cono circolare retto e prendiamo in considerazione lo sviluppo della figura costituita dalla moltitudine dei coni mostrato schematicamente nella figura 5 e quindi limitiamoci, per ora, a considerare le circonferenze di base di questi coni.

La figura 5 è stata costruita mediante la seguente regola: partendo da una circonferenza iniziale sulla semiretta *a* di raggio R_0 è individuata una seconda circonferenza di raggio R_1 sulla semiretta *b* e tangente alla circonferenza di raggio R_0 come nella figura 8.

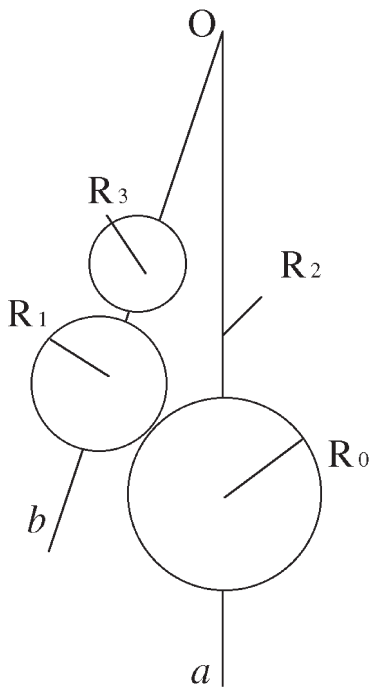


Fig. 8

Nello stesso modo è individuata una terza circonferenza di raggio R_2 sulla semiretta *a* e tangente alle altre due circonferenze.

Una quarta circonferenza di raggio R_3 su *b* è individuata in maniera tale che sia tangente alle circonferenze di raggi R_2 e R_1 e così via.

Siano ora $l_0, l_1, l_2 \dots$ ecc. le distanze dei centri delle rispettive circonferenze dal punto *O*. Impostiamo che i raggi delle circonferenze siano proporzionali alle distanze dei loro centri dal punto *O*.

$$R_i = k l_i \tag{4}$$

È intuitivo che debba sussistere una relazione fra il parametro *k* e l’angolo definito dalle due semirette *a* e *b*, cioè l’angolo di apertura dello spicchio che indicheremo con α .

Il problema è quindi il seguente: stabilire la relazione esistente tra l’angolo di apertura α e il parametro *k* considerando che l’intera struttura geometrica deve essere sia possibile sia invariante per trasformazioni di similitudine (ingrandimenti o rimpicciolimenti); tale proprietà è tipica, come s’è visto, degli oggetti frattali (self-similarity).

La similitudine implica che deve sussistere la relazione:

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{l_{i+2}}{l_{i+3}} \tag{5}$$

da cui si ricava, tenuto conto della figura 8 e della relazione (4), che

$$l_i = l_{i+1} \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \tag{6}$$

ovvero

$$l_n = l_0 \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^{\frac{n}{2}} \tag{7}$$

Per quanto riguarda la condizione di mutua tangenza delle circonferenza essa è espressa dalla seguente relazione (teorema del coseno):

$$(R_i + R_{i+1})^2 = l_i^2 + l_{i+1}^2 - 2l_i \cdot l_{i+1} \cos(\alpha) \tag{8}$$

da cui, tenuto conto delle precedenti relazioni si ricava finalmente la relazione cercata.

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - k^2} - k^2 \tag{9}$$

La figura 5 è infatti stata realizzata mediante un programma in C che utilizza queste relazioni.

Per applicare la formula (3) e calcolare la dimensione frattale del cavolfiore occorre ora stabilire come i suoi petali si replicano in funzione delle loro dimensioni.

Indicheremo con $\rho(n)$ il numero di petali che si possono contare quando le loro dimensioni (raggi) sono maggiori o uguali a R_n ovvero quando il loro raggio R è

$$R \geq R_n = R_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (10)$$

In pratica è più semplice un approccio di tipo induttivo, nel senso di determinare per via induttiva una formula ricorsiva contando il numero di circonferenze (petali) ad ogni iterazione. Si osservi che nella figura 5 si è ricostruita la struttura “madre” in uno solo dei petali (in basso) ma non dobbiamo dimenticare che ad ogni passaggio successivo all’ottavo ($n = 8$) spuntano nuovi petali anche in molti di quelli che abbiamo già contato.

Comunque è facile ricostruire la sequenza dei primi termini di ρ :

- $\rho(0) = 1$
- $\rho(1) = 7$
- $\rho(2) = 7 + 6 = 13$
- $\rho(3) = 7 + 6 + 7 = 20$
- $\rho(4) = 7 + 6 + 7 + 6 = 26$
- $\rho(5) = \dots = 33$
- $\rho(6) = 39$
- $\rho(7) = 46$
- $\rho(8) = 52$
- $\rho(9) = 52 + 7 + 7 \cdot 7 = 108$
- $\rho(10) = 108 + 6 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 198$

Una formula ricorsiva allora è la seguente:

$$\rho(n) = \rho(n-1) + (6 \cdot (n \bmod 2) - 1) + 7 \cdot n \bmod 2 \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\text{int}(\frac{n}{2})} (n - 8i) \cdot 7^i\right)$$

ove $n \bmod 2$ è il resto della divisione di n per 2 e $\text{int}(n/2)$ è la parte intera del quoziente di n diviso per 2.

La formula è decisamente complicata, comunque con l’ausilio di un semplice programma in uno qualsiasi dei linguaggi didattici (Basic, Pascal, C) si può calcolare la dimensione frattale del cavolfiore attraverso la formula derivata dalla (2):

$$d(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{\rho(8n)}{\rho(8(n-1))}\right)}{4 \cdot \log\left(\frac{1+k}{1-k}\right)} \quad (11)$$

essendo il parametro di omotetia

$$r = \frac{R_n}{R_{n-1}} \quad (12)$$

e tenuto conto della relazione (10).

La formula (11) è stata determinata prendendo in considerazione il sottoinsieme dei multipli di 8 degli indici dei raggi, questo perché il rapporto $\rho(n)/\rho(n-1)$ risulta stabilmente oscillante al tendere di n all’infinito. L’oscillazione ha periodo stabile di 8 iterazioni e il suo senso fisico è dovuto al fatto che dopo 8 iterazioni inizia la ricrescita di petali in quelli creati, appunto, 8 passaggi prima.

Quindi in realtà il limite di $\rho(n)/\rho(n-1)$ per n tendente all’infinito non esiste!

Il grafico della dimensione frattale in funzione di k è riportato nella figura 6 (cerchietti).

A questo punto occorre ricordare che, in realtà, il nostro modello consiste in un assemblaggio di coni circolari retti, per questo è fondamentale determinare una relazione che leghi il parametro base k all’angolo di apertura del cono, così che fissato un determinato valore del medesimo siano completamente definiti tutti gli altri parametri del modello. Per trovare questa relazione facciamo riferimento alla seguente figura

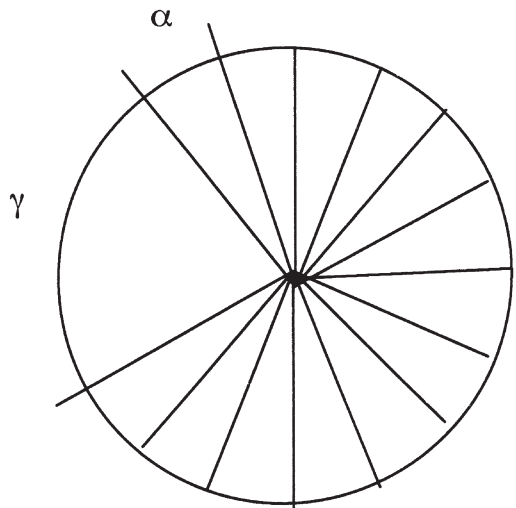


Fig. 9

ove α è l’apertura di ogni spicchio. Fra α e γ sussiste la relazione

$$\alpha = \frac{2\pi - \gamma}{13}$$

ed è facile dimostrare che la semiapertura del cono è data dalla relazione:

$$\beta = \arcsen\left(\frac{13\alpha}{2\pi}\right)$$

e quindi, considerando la relazione (9), ecco legata l'apertura del cono (2β) al parametro k .

Note bibliografiche

Sul concetto di dimensione frattale una trattazione rigorosa ed esauriente ma non trasparente può essere trovata a pagina 14 nel testo di Falconer [2].

Un testo piuttosto "fisico", nel senso che riporta molti esempi applicati alla fisica è quello di Feder in cui si può trovare il metodo dei momenti per il calcolo della dimensione frattale [3]. La nostra rivista ha, del resto, già dedicato due lavori [4] [5] al contesto della geometria frattale, e in particolare ([5]) alla descrizione di una semplice

esperienza di carattere frattale ove si mostra che pallottole di carta accartocciata costituiscono oggetti frattali, non certo deterministici, di dimensione compresa fra 2 e 3. Per quanto riguarda le implicazioni fisico-biologiche delle dimensioni sugli esseri viventi una semplice ed efficace trattazione la si può trovare nel testo di Zanetti 'Percorsi di fisica' [6] da pagina 26.

- [1] B.B. MANDELBROT, *Gli oggetti frattali*, Einaudi Paperbacks 173, Torino (1987).
- [2] K.J. FALCONER, *The Geometry of fractal sets*, Cambridge University Press (1985).
- [3] J. FEDER, *Fractals*, Pergamon, New York (1988).
- [4] F. DE STEFANO, *Il caos deterministico* LFNS, XXIV, 4 (1991).
- [5] R.H. KHO, C.P. BEAN, *Un semplice esperimento di carattere frattale*, LFNS, XXV, 4 (1982).
- [6] V. ZANETTI, *Percorsi di fisica*, ZANICHELLI, Bologna (1990).

È il 1951, arrivo a Gottinga. Vado al Max Planck Institut ancora con la mia valigia e dico:

– Sono il tal dei tali, ho una borsa di studio.

– Sì, lo sappiamo, l'aspettavamo. Ci dica dove e quando è nato.

Rispondo e loro insistono:

– A che ora è nato?

Rimango interdetto, poi rispondo:

– Non lo so, ma se necessario posso chiederlo a mia madre.

L'interrogatorio continua e alla fine non posso trattenermi dal chiedere loro:

– So bene che voi Tedeschi siete molto esatti, mentre noi Italiani possiamo talvolta apparire piuttosto approssimativi, ma, per favore, potete dirmi a cosa vi serve sapere l'ora della mia nascita?

– Per farle l'oroscopo.

– Oh scusate, allora ho sbagliato indirizzo!

Sto per riprendere la mia valigia, e loro:

– Ma l'oroscopo non è obbligatorio, se non vuole non glielo facciamo!

– Ma questo è proprio il Max Planck Institut für Physik?

– Sì.

– Diretto dal professor Werner Heisenberg?

– Sì.

– E fate gli oroscopi?

– Sì, ma sono facoltativi

– Ma no, ma no, fatelo pure.

Piuttosto esterrefatto, vado nello studio che m'avevano assegnato. Seppi poi che gli oroscopi li facevano davvero, a tutti quelli che capitavano a tiro, per ordine di C.F. von Weizsäcker, noto fisico e fratello dell'ex presidente della Repubblica Federale Tedesca, e li facevano alla tedesca, col massimo rigore, secondo regole che avevano disseppellito dagli archivi medievali. Von Weizsäcker in qualche modo ci credeva e il suo intendimento era di farne in gran numero per poi confrontarne la veridicità con metodi statistici rigorosi.

Paolo Budinich
L'arcipelago delle meraviglie
Di Renzo Editore